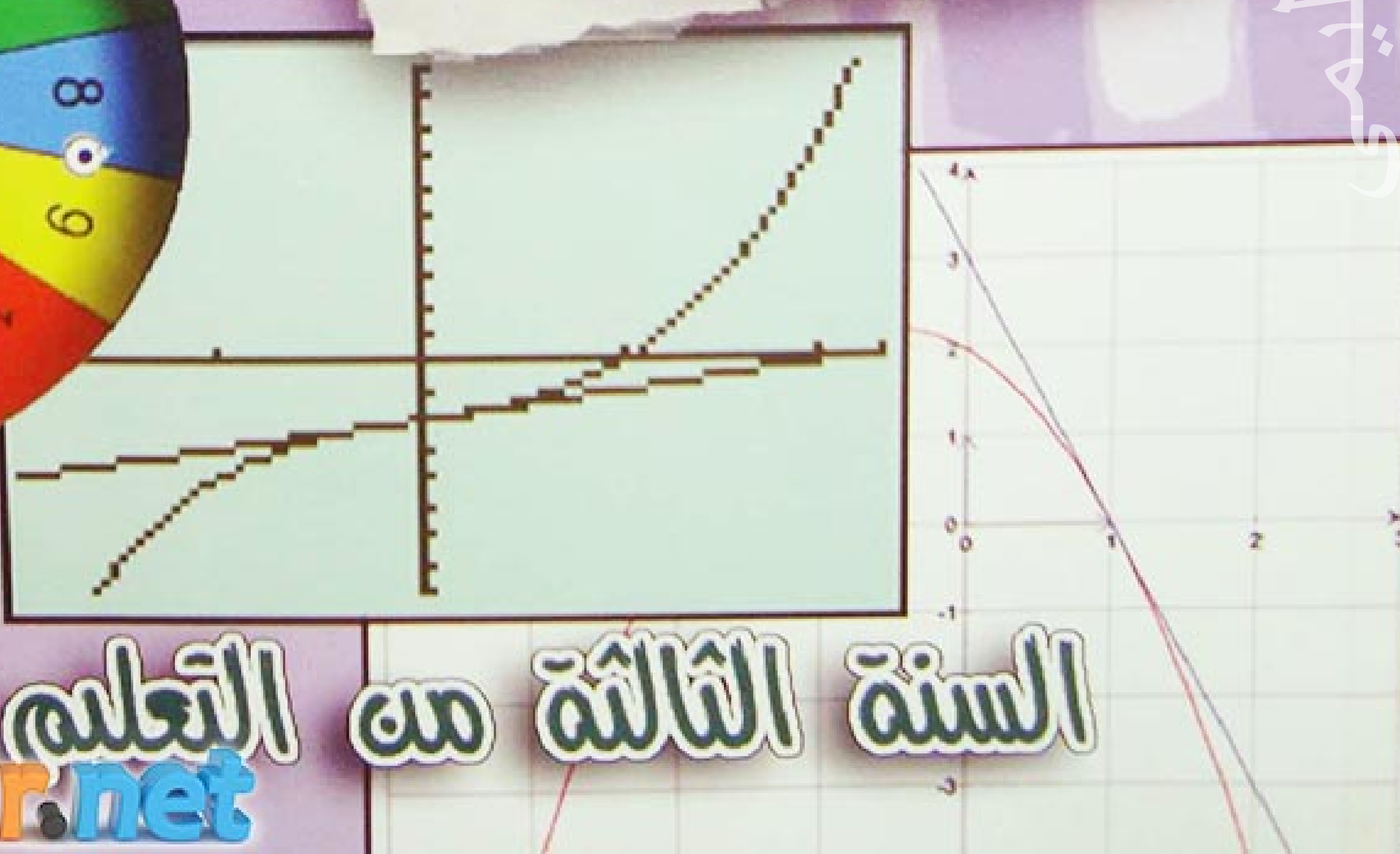
وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

الشعب: آداب و فلسفة

لغات أجنبية

3



السنة الثالثة من التعليم الثانوي

elbassair.net

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي

الشعب:

- آداب وفلسفة
- لغات أجنبية

إشراف و تأليف

جمال تاوريرت مفتش التربية والتكوين

المؤلفون:

- محمد فاتح مراد مفتش التربية والتكوين
- محمد قورين مفتش التربية والتكوين
- عبد الحفيظ فلاح أستاذ التعليم الثانوي
- عبد المؤمن موس أستاذ التعليم الثانوي
- غريسي بلجيلالي أستاذ التعليم الثانوي

بسم الله الرحمان الرحيم

مدخل

أعد هذا الكتاب استجابة لمتطلبات المنهاج الجديد الخاص بالسنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي الخاص بشعبتي الآداب و الفلسفة و اللغات الأجنبية الذي شرع في تطبيقه ابتداء من الدخول المدرسي 2007 – 2008 .

بالإضافة إلى الاحترام التام للمنهاج فقد حاولنا العمل بمختلف التوجيهات الواردة فيه كما حرصنا على تجسيد المقاربة بالكفاءات التي بني عليها من خلال اختيار أنشطة مناسبة سواء عند مقاربة مختلف المفاهيم أو عند إدماجها كما حظي استعمال تكنولوجيات الإعلام و الاتصال بالاهتمام اللازم.

يحتوي الكتاب على ستة (6) أبواب تمت هيكلتها بنفس الكيفية على النحو التالي:

- عرض للكفاءات المستهدفة إضافة إلى نبذة تاريخية.
- أنشطة تمهيدية.
- الدرس.
- طرائق و تمارين محلولة.
- أعمال موجهة.
- استعد للبكالوريا.
- تمارين و مسائل.
- اختبر معلوماتك.

أردنا أن نجعل من هذا الكتاب وسيلة عمل ممتعة و ناجعة في آن واحد، نتمنى أن يسمح لكم من التحضير الجيد لامتحان نهاية السنة.

و كون هذا العمل إنجازا بشريا فإنه لا يخلو من النقائص، وعليه فإننا نرحب، بكل اهتمام، بانتقادات القراء التي تهدف إلى إثراء و تحسين الكتاب و هم مشكورون مسبقا على ذلك.

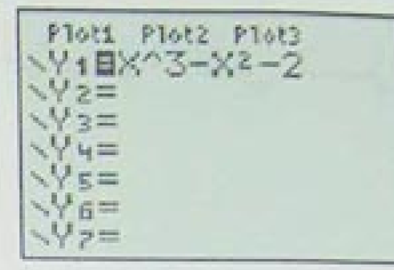
Ti

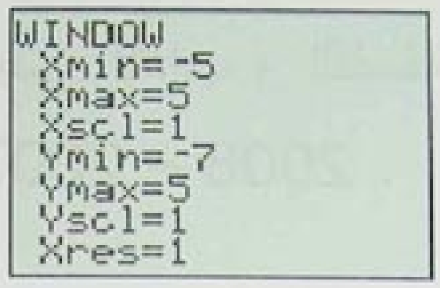
1. الدوال:

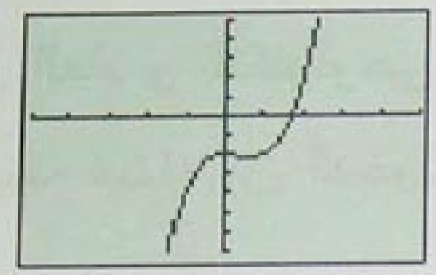
I. تمثيل دالة :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - x^2 - 2$

❶ Y= ❷ WINDOW ❸ GRAPH

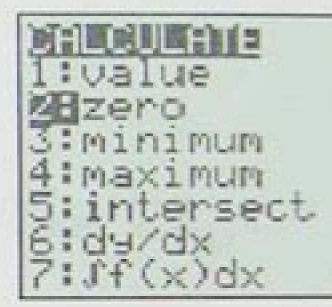


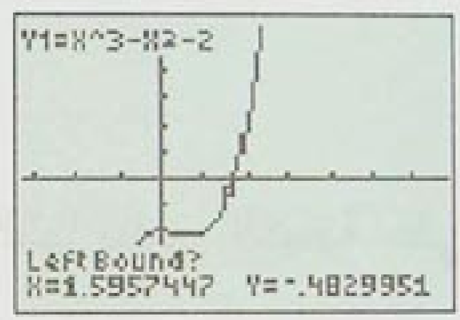


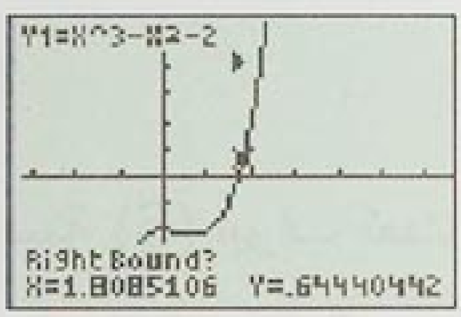


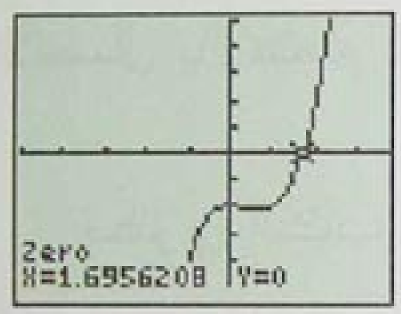
II. قراءة الفاصلة α لنقطة تقاطع المنحني مع محور الفواصل:

❶ 2nd TRACE ❷ باستعمال ◄ أو ► عين فاصلة أصغر من α ثم انقر ENTER ❸ عين فاصلة أكبر من α ثم انقر ENTER ❹ اضغط مرة أخرى على ENTER و نقرأ $\alpha \approx 1,6956208$









2. المتتاليات:

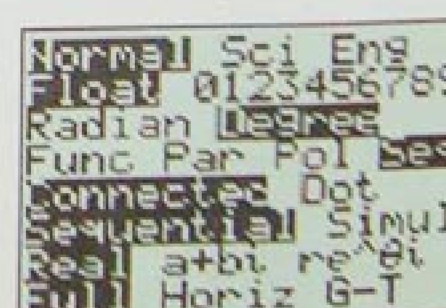
المتتالية من الشكل $u_n = f(n)$

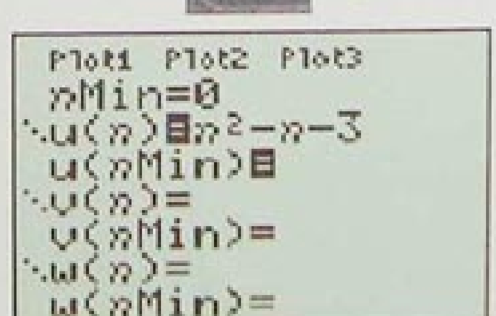
• تمثل المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2n^2 - n - 3$

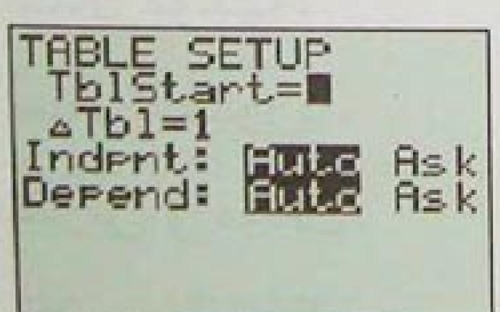
❶ MODE ونحدد الخاصية seq ❷ Y= و لكتابة n نستعمل X,T,θ,n ❸ 2nd TBLSET 0 ENTER 1 ENTER ❹ 2nd GRAPH ❺ WINDOW و نتمم

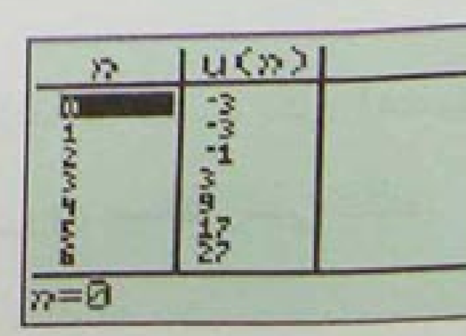
$Y\,min = -5$ ، $Y\,max = 100$

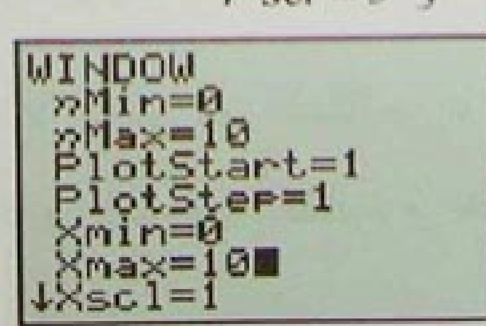
و $Y\,scl = 5$ ❻ GRAPH







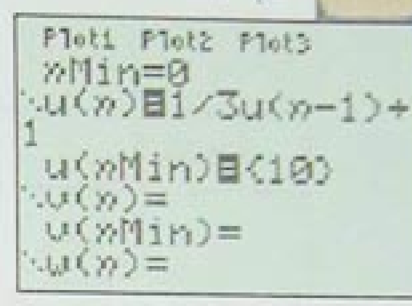




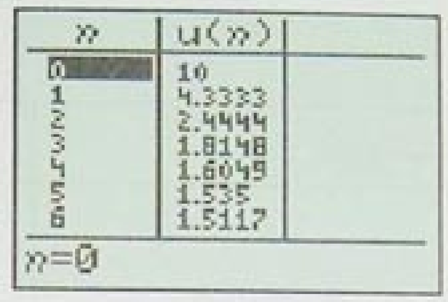
3.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية:

• نمثل المتتالية (u_n) المعرفة على N بـ: $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ ، $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1$

❶ MODE
ونحدد الخاصية seq،
Y= لكتابة u نضغط
2nd ثم 7

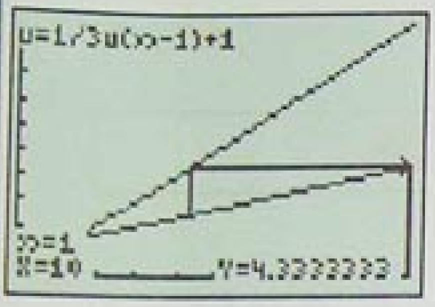


❷ 2nd WINDOW
ثم 2nd GRAPH



❸ 2nd ZOOM
ونختار web

❹ WINDOW نختار النافذة،
ثم TRACE

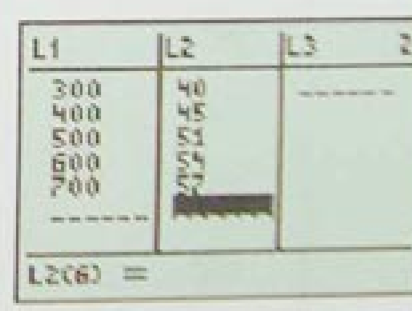


4.الإحصاء:

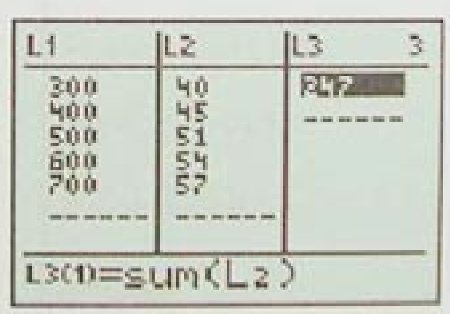
فيما يلي نعتبر السلسلة الاحصائية التالية:

الكتلة (g)	300	400	500	600	700
التكرار	40	45	51	54	57

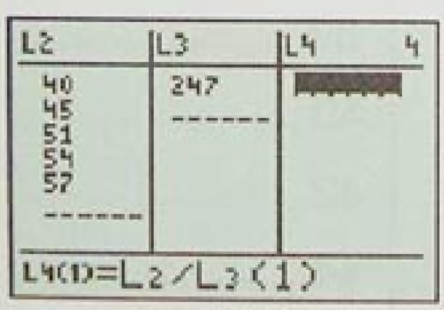
❶ STAT EDIT
و اتمم القوائم



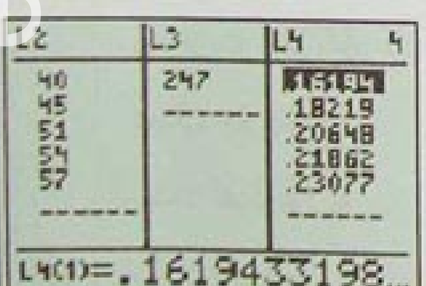
❷ لإتمام التكرار الإجمالي
في L3 : 2nd STAT
MATH5 ◄ ◄
Sum() 2nd 2 (L2) ENTER



❸ لإظهار سلسلة
التواترات في L4 ،
حدد L4 ثم 2nd
2(L2) ÷ 2nd
3(L3) ثم (1)

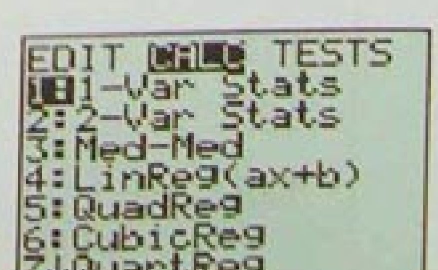


❹ انقر ENTER
فتسجل النتائج في
العمود L4

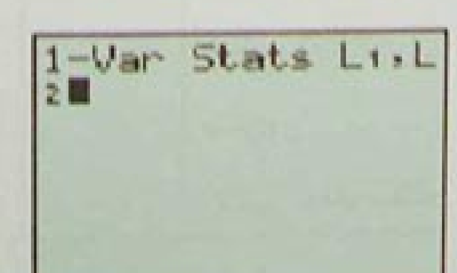


5. حساب المقاييس:

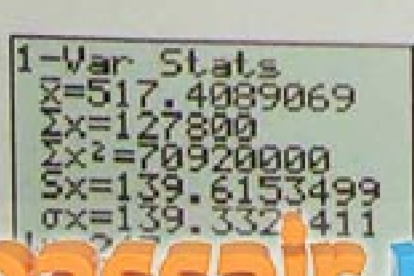
❶ STAT ► 1 (CALC)



❷ 2nd ENTER
L2 ، L1



❸ 2nd ENTER
و نقرأ $\overline{X}$ ، σ_X ، Q_1 و Q_3



الفهرس

1 القسمة الإقليدية
في مجموعة الأعداد الصحيحة 1

الكفاءات المستهدفة

- معرفة و تحديد حاصل القسمة الإقليدية و باقيها.
- حصر عدد بين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح.
- تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي.
- معرفة توافق عددين صحيحين.
- معرفة خواص الموافقة و استعمالها في حل مشكلات.
- استعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة خاصية متعلقة بعدد طبيعي.

التشفير: استخدم الإنسان التشفير (*CRYPTOGRAPHIE*) منذ نحو ألفي عام قبل الميلاد لحماية رسائله السرية، وبلغ هذا الاستخدام ذروته في فترات الحروب خوفاً من وقوع الرسائل الحساسة في أيدي العدو. وقام يوليوس قيصر بتطوير خوارزميته المعيارية المعروفة باسم **شفرة قيصر** التي كانت نصًا مشفراً لتأمين اتصالاته ومراسلاته مع قادة جيوشه.

اعتمد القيصر في خوارزميته على تعويض كل حرف بحرف آخر من خلال عملية سحب خطية لكل الحروف. فمثلا بالنسبة للحروف الأبجدية إذا عوضنا الحرف ا بالحرف د، نعوض الحرف ب بالحرف هـ، الحرف ج بالحرف و إلخ...

ن	م	ل	ك	ي	ط	ح	ز	و	ه	د	ج	ب	أ
ف	ع	س	ن	م	ل	ك	ي	ط	ح	ز	و	ه	د
غ	ظ	ض	ذ	خ	ث	ت	ش	ر	ق	ص	ف	ع	س
ج	ب	أ	غ	ظ	ض	ذ	خ	ث	ت	ش	ر	ق	ص

- فك، باستعمال شفرة قيصر، الرسالة التالية: د س ق ع س ع ر ذ د ك د س ف و د ك.
- أكتب، باستعمال شفرة قيصر، رسالة إلى صديقك.

النشاط الأول

تعريف 1: نقول عن عدد طبيعي أنه تام إذا كان مساويا لمجموع كل قواسمه الموجبة ما عدا نفسه.

فمثلا 6 عدد كامل لأن قواسمه الموجبة هي على التوالي 1، 2، 3 و 6 و لدينا $6=3+2+1$.

1. أثبت أن العددين 28 و 496 كاملان.
2. قارن كلا من العددين 27 و 30 بمجموع قواسمه الموجبة ما عدا نفسه.

تعريف 2: نقول عن عددين طبيعيين أنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم الموجبة لأحدهما ما عدا نفسه مساويا للأخر و العكس.

3. أثبت أن العددين 220 و 284 متحابان.

EULER Leonhard
Suisse, 1707-1783

هل تعلم أن الرياضياتي " ليبونارد أولر" قد برهن بدون استعمال الإعلام الآلي أن العدد 2305843008139952128 عدد مثالي.

" ليبونارد أولر" من أكبر العلماء الذين عرفهم التاريخ ، استقرّ في البداية بـسان بيترسبورق ثم في برلين سنة 1741 حيث ترأس أكاديمية العلوم إلى غاية 1766 .

تخصص في علم الفلك ، الفيزياء و الرياضيات و هو من أحد مؤسسي فرع الرياضيات المتمثل في التحليل الوظيفي و المعادلات التفاضلية.

النشاط الثاني

137	12
17	11
5	

لدينا هكذا: $137=12\times11+5$

حاصل قسمة 137 على 12 هو 11.
باقي قسمة 137 على 12 هو 5.

1. بإتباع نفس المنهجية المقابلة عين باقي و حاصل قسمة a على b في الحالتين التاليتين:

* $a=312$ و $b=46$ ، * $a=676$ و $b=13$.

2. أحصر العدد الطبيعي a بين مضاعفين متعاقبين للعدد الطبيعي b في الحالتين التاليتين:

* $a=170$ و $b=29$ ، * $a=2007$ و $b=16$.

3. عين باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7 . ماذا تلاحظ ؟

نقول عن العددين 660 و 366 أنهما متوافقان بترديد 7 و نكتب $660\equiv366[7]$.

- هل العددان 153 و 2008 متوافقان بترديد 5 ؟
- هل العددان 274 و 69 متوافقان بترديد 3 ؟
- بين أن العددين $a=234$ و $b=146$ متوافقان بترديد $n=11$. ما هو باقي قسمة $a-b$ على n
- بين أن العددين $a=174$ و $b=109$ متوافقان بترديد $n=13$. ما هو باقي قسمة $a-b$ على n

النشاط الثالث

نذكر أن $a \equiv b[n]$ يعني أن للعددين الصحيحين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

لإنجاز ورقة الحساب أدناه اتبع الخطوات التالية:

* بعد اختيار العدد الطبيعي n و حجزه في الخلية $D2$، أحجز في الخليتين $A2$ و $B2$ عددين لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n و في الخليتين $G2$ و $H2$ عددين آخرين لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

* لتعيين باقي قسمة a على n في الخلية $A3$ أحجز $\boxed{=MOD(A2;D2)}$ ثم واصل بنفس الكيفية...

* بعد حجز عدد طبيعي p في الخلية $E2$، أحجز في الخلية $G5$: $\boxed{\text{= PUISSANCE(A2;E2)}}$ ثم واصل ...

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	a	b		n	p		c	d	
2	38	23		5	2		14	69	
3	3	3					4	4	باقي القسمة على n
4	a+c	b+d		ac	bd		a^P	b^P	
5	52	92		532	1587		1444	529	
6	2	2		2	2		4	4	باقي القسمة على n

1. لاحظ مختلف البواقي المحصل عليها في السطر 6 بعد تغيير الأعداد الصحيحة a، b، c و d و العددين الطبيعيين n و p وفق الشروط المحددة أعلاه.
2. ماذا تلاحظ على العددين $a+c$ و $b+d$ ؟ $a\times c$ و $b\times d$ ؟ a^p و b^p ؟
3. خمن بعض خواص الموافقة بترديد n.

النشاط الرابع

في القديم كان اليونان يتعاملون جيدا مع المربع التام لعدد طبيعي و قد توصلوا إلى النتيجة التالية:
كلما جمعنا أعدادا فردية متتابعة و بالتتابع نحصل على مربع تام لعدد طبيعي.

و هكذا: 1 مربع العدد 1، $4=3+1$ و 4 مربع العدد 2، $9=5+3+1$ و 9 مربع العدد 3، ...

1) أنجز ورقة الحساب المقابلة بإتباع الخطوات التالية:
في العمود B و ابتداء من الخلية $B2$ أحجز الأعداد الفردية من 1 إلى 49.
في الخلية $C3$ أحجز $\boxed{=B2+B3}$ وفي الخلية $C4$ أحجز $\boxed{=C3+B4}$
ثم اسحب إلى الأسفل بع تحديد الخلية $C4$.

	A	B	C
1	n	الأعداد الفردية (2n-1)	مجموع الأعداد الفردية الأولى
2	1	1	1
3	2	3	4
4	3	5	9
5	4	7	16
6	5	9	25
7	6	11	36
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		
12	11		
13	12		
14			
15			

2) عين المجاميع التالية: $S=1+3+5+7+9+11+13$.
$S'=1+3+5+7+9+...+21+23$.
$S''=1+3+5+7+9+...+47+49$، ماذا تلاحظ ؟

3) خمن حساب المجموع $1+3+5+...+(2n-1)$ بدلالة n.

4) بفرض التخمين السابق صحيح من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ أثبت صحته من أجل العدد الطبيعي $n+1$.

نقول أن هذه الخاصية وراثية.

نقول عن خاصية $P(n)$ متعلقة بالعدد الطبيعي n أنها وراثية إذا كانت صحيحة من أجل العدد الطبيعي $n+1$ كلما كانت صحيحة من أجل عدد طبيعي n.

ـ القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

1. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف: a و b عددان صحيحان و b غير معدوم. القول أن العدد b يقسم العدد a يعني وجود عدد صحيح k حيث: $a=kb$. نقول كذلك أن b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد b.

نكتب $b|a$ و نقرأ b يقسم a .

أمثلة:

- $48=8\times6$ و منه $6|48$
- $48=(-8)\times(-6)$ و منه $(-6)|48$
- $(-65)=(-13)\times5$ و منه $5|(-65)$
- $(-65)=(-13)\times5$ و منه $(-13)|(-65)$

ملاحظة: للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$ ($a=kb$ يعني $-a=(-k)b$)

2. القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة: من أجل كل عدد صحيح a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم b، توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث: $a=bq+r$ و $0\leq r<b$.

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

البرهان: العدد a إما مضاعف لـ b و إما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد عدد صحيح q وحيد حيث $qb\leq a<(q+1)b$ و نستنتج من هذا أن $0\leq a-qb<b$.

بوضع $r=a-qb$ نحصل على $a=bq+r$ مع $0\leq r<b$.

ملاحظة: يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b.

ونحصل على $a=bq+r$ و $0\leq r<|b|$.

أمثلة:

- $37=5\times7+2$. 7 هو حاصل قسمة 37 على 5 و 2 هو باقي قسمة 37 على 5.
  و نلاحظ أن $35\leq37<40$ أي $5\times7\leq37<5\times(7+1)$ و $2=37-35$.
- $95=7\times13+4$. 13 هو حاصل قسمة 95 على 7 و 4 هو باقي قسمة 95 على 7.
  و نلاحظ أن $91\leq95<98$ و $4=95-91$.
- $192=12\times16$. 16 هو حاصل قسمة 192 على 12 و 0 هو باقي قسمة 192 على 12.
  و نلاحظ أن $192\leq192<204$ و $0=192-192$.
- $-39=5\times(-8)+1$. -8 هو حاصل قسمة -39 على 5 و 1 هو باقي قسمة -39 على 5.
  و نلاحظ أن $-40\leq-39<-35$ و $1=-39-(-40)$.

تمرين محلول1: عين باقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي b ، ثم أحصر العدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b في كل حالة من الحالات الآتية.

1. $a = 8159$ و $b = 52$.
2. $a = 725$ و $b = 91$.
3. $a = -7361$ و $b = 47$.

حل: 1. $8159 = 52\times156+47$. 156 هو حاصل قسمة 8159 على 52 و 47 هو باقي قسمة 8159 على 52 .

$52\times156 \leq 8159 < 52\times157$ أي $8112 \leq 8159 < 8164$.

2. $725 = 91\times7+88$. 7 هو حاصل قسمة 725 على 91 و 88 هو باقي قسمة 725 على 91.

$91\times7 \leq 725 < 91\times8$ أي $637 \leq 725 < 728$.

3. $-7361 = 47\times(-157)+18$. -157 هو حاصل قسمة -7361 على 47 و 18 هو باقي قسمة -7361 على 47 . $47\times(-157) \leq -7361 < 47\times(-156)$ أي $-7379 \leq -7361 < -7332$.

تمرين محلول2: a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 6.

1. ما هو باقي قسمة العدد a على 5 ؟
2. ما هو باقي قسمة العدد a على 2 ؟

حل: $a = 10k+6$ حيث k عدد صحيح .

1. $a = 10k+5+1$ و منه $a = 5(2k+1)+1$ ومنه باقي قسمة a على 5 هو 1 .
2. $a = 2(5k+3)$ ومنه باقي قسمة a على 2 هو 0 .

تمرين محلول3: حلل العدد 1372 إلى جداء عوامل أولية و عين مجموعة قواسمه .

طريقة: عدد قواسم عدد طبيعي n تحليله إلى جداء عوامل أولية $n = a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\ldots\times a_p^{\alpha_p}$ هو :

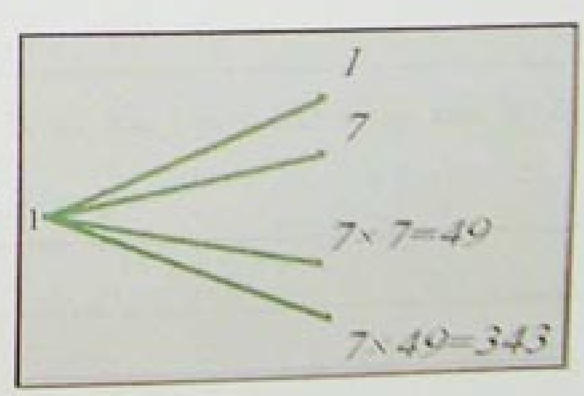
$$(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times\ldots\times(\alpha_p+1)$$

نحسب جداء الأعداد المحصل عليها .

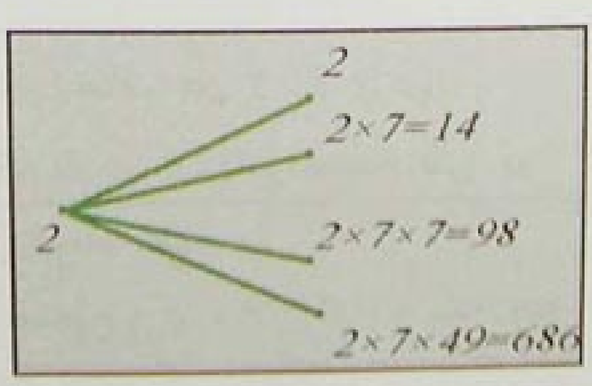
حل: 1) $1372 = 2^2\times7^3$.عدد قواسم 1372 هو $12 = (1+3)(1+2)$. العدد 1372 يقبل إذن 12 قاسما .

2) لتكن D_{1372} مجموعة قواسم 1372 . لإيجاد المجموعة D_{1372} يمكن استعمال الشجرة الآتية .

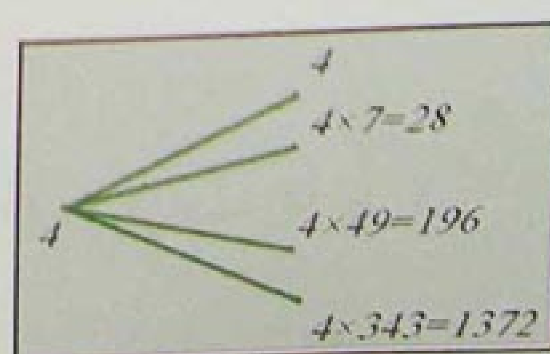
2^0



2^1



2^2



مجموعة قواسم العدد 1372 هي إذن $D_{1372} = \left\{\begin{matrix}1;2;4;7;14;28;49;98;\\196;343;686;1372\end{matrix}\right\}$

الدرس

المواقفات في $\mathbb{Z}$

1. تعريف

تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.
نرمز $a \equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n.

أمثلة: $27 \equiv 92[5]$ ، $12 \equiv 34[11]$ ، $24 \equiv 3[7]$ ، $-20 \equiv 1[7]$ ، $-59 \equiv -3[8]$.

ملاحظة: من أجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0[1]$.

2. مبرهنة

مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. يكون لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعفا للعدد n.

البرهان: نفرض أن لـ a و b نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n.
و منه نضع $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ حيث q و q' عددان صحيحان و $0 \le r < n$.
و منه $a - b = nq + r - nq' - r = n(q - q')$. بوضع $q'' = q - q'$ يكون لدينا $a - b = nq''$
مع q'' عدد صحيح. نستنتج هكذا أن $a - b$ مضاعف لـ n.
عكسيا : نفرض $a - b$ مضاعف لـ n . يوجد إذن عدد صحيح k حيث أن $a - b = kn$.
ليكن r باقي قسمة b على n.
لدينا $b = nq + r$ حيث q عدد صحيح و $0 \le r < n$.
و منه $a = b + kn = nq + r + kn = (q + k)n + r$.
بما أن $q + k$ عدد صحيح و $0 \le r < n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n.
ومنه لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

نتيجة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. يكون a و b متوافقين بترديد n إذا و فقط إذا كان $a - b$ مضاعفا لـ n.

خاصية: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \ge 2)$.
كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n، باقي قسمته على n.

البرهان: a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.
نعلم أن $a = nq + r$ حيث q عدد صحيح و $0 \le r < n$. و منه $a - r = nq$.
و بالتالي $a - r$ مضاعف لـ n.

ملاحظة: نقول أن r هو الباقي إلا إذا كان $0 \le r < n$. فمثلا $16 \equiv 6[5]$ و 6 ليس باقي قسمة 16 على 5
لأن $6 \ge 5$. أما الباقي فهو 1 لأن $16 \equiv 1[5]$ و $0 \le 1 < 5$.

تمرين محلول1: من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة:

1) $26 \equiv 11[5]$ ؛ 2) $-32 \equiv 18[10]$ ؛ 3) $478 \equiv 32[5]$ ؛ 4) $58 \equiv -5[7]$

5) $63^2 \equiv 14[5]$ ؛ 6) $144 \equiv 11[19]$ ؛ 7) $131^2 \equiv 25[12]$ ؛ 8) $48^3 \equiv 36[7]$

طريقة: للبرهان على أن $a \equiv b[n]$ يمكن البرهان على أن $a-b$ مضاعف لـ n أو البرهان على أن لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

حل:

1) $26-11=15$ و $15=3\times5$. إذن $26 \equiv 11[5]$ صحيحة.

2) $-32-18=-50$ و $-50=(-5)\times10$. إذن $-32 \equiv 18[10]$ صحيحة.

3) $478-32=446$ و $446=89\times5+1$. إذن $478 \equiv 32[5]$ خاطئة . و نكتب $478 \not\equiv 32[5]$.

4) $58+5=63$ و $63=9\times7$. إذن $58 \equiv -5[7]$ صحيحة.

5) $63^2=3969$. باقي قسمة 63^2 على 5 هو إذن 4 وبما أن باقي قسمة العدد 14 على 5 هو كذلك 4 فإن $63^2 \equiv 14[5]$ صحيحة.

6) $144=19\times7+11$ و بما أن العدد 144 يوافق بترديد 19 باقي قسمته على 19 نستنتج أن $144 \equiv 11[19]$ صحيحة.

7) $131^2=1430\times12+1$ و $25=2\times12+1$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $131^2 \equiv 25[12]$ صحيحة.

8) $48^3=15799\times7+6$ و $36=5\times7+1$ لم نحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $48^3 \equiv 36[7]$ خاطئة. و نكتب $48^3 \not\equiv 36[7]$.

تمرين محلول2: عين في كل حالة من الحالات الآتية ($a \equiv b\ [n]$) باقي قسمة a على n و باقي قسمة b على n ، ثم أذكر صحة أو خطأ الموافقة.

1) $262 \equiv 927[5]$ ؛ 2) $-322 \equiv 78[4]$ ؛ 3) $471 \equiv 30[8]$ ؛ 4) $158 \equiv 39[17]$

حل:

1) $262=5\times52+2$ و $927=5\times185+2$ إذن باقي قسمة 262 على 5 هو 2 و باقي قسمة 927 على 5 هو 2 و منه 262 و 927 لهما نفس الباقي في القسمة على 5 إذن $262 \equiv 927[5]$ صحيحة .

2) $-322=4\times(-81)+2$ و $78=4\times19+2$ إذن باقي قسمة -322 على 4 هو 2 و باقي قسمة 78 على 4 هو 2 و منه -322 و 78 لهما نفس الباقي في القسمة على 4 إذن $-322 \equiv 78[4]$ صحيحة .

3) $471=8\times58+7$ و $30=8\times3+6$ إذن باقي قسمة 471 على 8 هو 7 و باقي قسمة 30 على 8 هو 6 و منه 471 و 30 ليس لهما نفس الباقي في القسمة على 8 إذن $471 \equiv 30[8]$ خاطئة. و نكتب $471 \not\equiv 30[8]$.

4) $158=17\times9+5$ و $39=17\times2+5$ إذن باقي قسمة 158 على 17 هو 5 و باقي قسمة 39 على 17 هو 5 و منه 158 و 39 لهما نفس الباقي في القسمة على 17 إذن $158 \equiv 39[17]$ صحيحة.

ـ خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

الخاصية1: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و من أجل كل عدد صحيح a لدينا: $a \equiv a \ [n]$.

البرهان: لدينا $a-a=0\times n$ و منه $a-a$ مضاعف للعدد n.

الخاصية2: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

إذا كان $a \equiv b \ [n]$ فإن $b \equiv a \ [n]$.

البرهان: إذا كان لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n فإن لـ b و a نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

الخاصية3 (خاصية التعدي) : n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة.

إذا كان $\left(a \equiv b \ [n] \right.$ و $\left. b \equiv c \ [n] \right)$ فإن $a \equiv c \ [n]$.

البرهان: a ، b و c أعداد صحيحة حيث $\left(a \equiv b[n] \right.$ و $\left. b \equiv c[n] \right)$.

$\left(a \equiv b[n] \right.$ و $\left. b \equiv c[n] \right)$ يعني $\left(a-b=kn \right.$ و $\left. b-c=k'n \right)$ (k و k' عددان صحيحان)

و منه و بالجمع نحصل على $a-c=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a \equiv c[n]$.

الخاصية4 (خاصية التلاؤم مع الجمع) : n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $\left(a \equiv b \ [n] \right.$ و $\left. c \equiv d \ [n] \right)$ فإن $a+c \equiv b+d \ [n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث $\left(a \equiv b[n] \right.$ و $\left. c \equiv d[n] \right)$.

$\left(a \equiv b[n] \right.$ و $\left. c \equiv d[n] \right)$ يعني $\left(a-b=kn \right.$ و $\left. c-d=k'n \right)$ (k و k' عددان صحيحان)

ومنه و بالجمع نحصل على $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a+c \equiv b+d[n]$.

الخاصية5 (خاصية التلاؤم مع الضرب) : n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $\left(a \equiv b \ [n] \right.$ و $\left. c \equiv d \ [n] \right)$ فإن $a\times c \equiv b\times d \ [n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن $\left(a \equiv b[n] \right.$ و $\left. c \equiv d[n] \right)$.

$\left(a \equiv b[n] \right.$ و $\left. c \equiv d[n] \right)$ يعني $\left(a-b=kn \right.$ و $\left. c-d=k'n \right)$ (k و k' عددان صحيحان)

لدينا $ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)=ak'n+dkn=(ak'+dk)n$

بما أن $ak'+dk$ عدد صحيح فإن $ac \equiv bd[n]$.

ملاحظة: يتم تعميم الخاصية السابقة إلى جداء عدة أعداد صحيحة.

الخاصية6: n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان.

إذا كان $a \equiv b \ [n]$ فإن $a^p \equiv b^p \ [n]$.

البرهان: يمكنك استعمال الاستدلال بالتراجع (أنظر التمارين).

تمرين محلول1: لتكن الأعداد الصحيحة التالية : $a=255$ ، $b=837$ و $c=3691$.

1. عين باقي قسمة الأعداد a، b و c على العدد 11 .
2. باستعمال الموافقات عين باقي قسمة كل من $a+b$ ، $a\times c$ ، $a+b+c$ ، a^2، $a\times b\times c$.

حل:

1. باستعمال حاسبة نجد أن بواقي الأعداد a ، b و c على العدد 11 هي 2 ، 1 ، 6 على الترتيب.
2. لدينا: $\begin{cases} a\equiv 2[11] \\ b\equiv 1[11] \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b\equiv 3[11]$ و منه الباقي هو 3.

لدينا $a\equiv 2[11]$ و $c\equiv 6[11]$. بتطبيق خاصية الضرب نجد $ac\equiv 12[11]$ و بما أن $12\equiv 1\ [11]$ فإنه بالتعدي $ac\equiv 1[11]$ و منه الباقي هو 1.

لدينا: $\begin{cases} a\equiv 2[11] \\ b\equiv 1[11] \\ c\equiv 6[11] \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b+c\equiv 9[11]$ و الباقي هو 9 .

لدينا: $a\equiv 2[11]$ و بتطبيق الخاصية 6 نجد $a^2\equiv 2^2\ [11]$ أي $a^2\equiv 4[11]$ و الباقي هو 4 .

$\begin{cases} a\equiv 2[11] \\ b\equiv 1[11] \\ c\equiv 6[11] \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الضرب نجد $a\times b\times c\equiv 1\times 2\times 6[11]$ أي $a\times b\times c\equiv 12[11]$

و $12\equiv 1[11]$ و بتطبيق خاصية التعدي نجد $a\times b\times c\equiv 1[11]$ و الباقي هو 1.

تمرين محلول2: a و b عددان صحيحان حيث $a\equiv 3\ [5]$ و $b\equiv 4\ [5]$.

1. بين أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5.
2. عين باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5 .
3. تحقق أن $b\equiv -1\ [5]$. استنتج باقي قسمة b^{2007} و b^{1428} على 5.

حل:

1. لدينا $\begin{cases} a\equiv 3\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a\equiv 6\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a\equiv 1\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ لأن $6\equiv 1\ [5]$. بتطبيق خاصية الجمع نحصل على: $2a+b\equiv 5\ [5]$ و بما أن $5\equiv 0\ [5]$ فإن $2a+b\equiv 0\ [5]$. باقي قسمة $2a+b$ على 5 هو 0. نستنتج هكذا أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5 .

2. لدينا $\begin{cases} a\equiv 3\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a^2\equiv 2\times 9\ [5] \\ b^2\equiv 16\ [5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a^2\equiv 3\ [5] \\ b^2\equiv 1\ [5] \end{cases}$ لأن $18\equiv 3\ [5]$ و $16\equiv 1\ [5]$.

بتطبيق خاصية الجمع نحصل على: $2a^2+b^2\equiv 4\ [5]$. باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5 هو إذن 4.

3. من الواضح أن $4\equiv -1\ [5]$ و منه باستعمال خاصية التعدي نحصل على $b\equiv -1\ [5]$.

بتطبيق الخاصية6 نحصل على $b^{2007}\equiv (-1)^{2007}\ [5]$ و $b^{1428}\equiv 1^{1428}[5]$ أي $b^{2007}\equiv -1[5]$ و $b^{1428}\equiv 1[5]$.

و بما أن $-1\equiv 4\ [5]$ فإن $b^{2007}\equiv 4[5]$. نستنتج أن باقي قسمة b^{2007} على 5 هو 4 و باقي قسمة b^{1428} على 5 هو 1.

الدرس

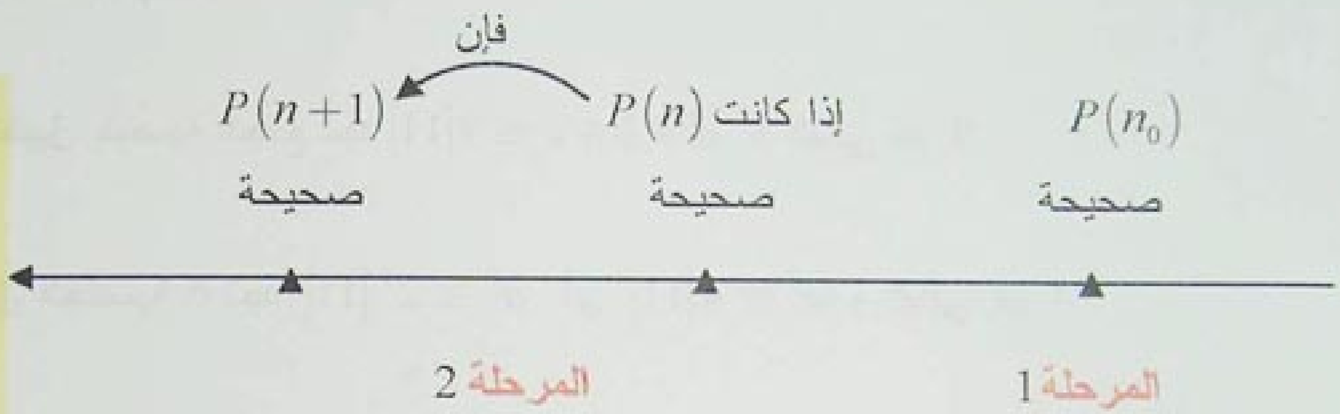
ـ الاستدلال بالتراجع

1. مبدأ الاستدلال بالتراجع

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.



الخلاصة:
من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $P(n)$ صحيحة.

ملاحظة: بصفة عامة المرحلة الأولى تتمثل في عملية تحقق بسيطة لا تطرح أي مشكل إلا أنها تبقى ضرورية لأنه يمكن لخاصية أن تكون وراثية و لكن خاطئة.

مثال: الخاصية:" من أجل كل عدد طبيعي n، "3^n مضاعف للعدد5 " خاطئة رغم أنها وراثية. بالفعل:

إذا كان 3^n مضاعفا للعدد5 فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $3^n = 5k$.

لدينا إذن $3^{n+1} = 3\times 3^n = 3(5k) = 5(3K)$ و منه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد5.

2. مثال

لنثبت صحة الخاصية التالية: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ "

المرحلة الأولى: من أجل $n=1$ لدينا: $\dfrac{1\times 2}{2} = 1$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة الثانية (الوراثة):

- نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ أي: $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+2+3+...+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

لدينا: $1+2+3+...+n+(n+1) = (1+2+3+...+n)+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

و منه $1+2+3+...+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

الخلاصة: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ".

تمرين محلول 1: أثبت، باستعمال الاستدلال بالتراجع، أنه:

من أجل كل عدد طبيعي n، العدد n^3-n مضاعف للعدد 3.

حل:

الخاصية " n^3-n مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة 1: من أجل $n=0$ ، $0^3-0=0=3\times 0$ و منه 0^3-0 مضاعف للعدد 3.

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$

أي: n^3-n مضاعف للعدد 3.

نضع $n^3-n=3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $n^3=3k+n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $\left[(n+1)^3-(n+1)\right]$ مضاعف للعدد 3.

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(3k+n)+3n^2+2n$$

$$(n+1)^3-(n+1)=3k+3n^2+3n=3(k+n^2+n)$$

و و بما أن $3(k+n^2+n)$ مضاعف للعدد 3 نستنتج أن $(n+1)^3-(n+1)$ مضاعف للعدد 3 .

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، n^3-n مضاعف للعدد 3 .

تمرين محلول2: نرمز بـ $P(n)$ إلى الخاصية التالية: " العدد 3 يقسم العدد 4^n+1 حيث n عدد طبيعي".

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، إذا كانت $P(n)$ صحيحة تكون $P(n+1)$ صحيحة.
2. هل يمكننا استنتاج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟ اشرح.

حل:

1. نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي أن العدد 3 يقسم العدد 4^n+1 و يمكننا أن نعبر عن ذلك بوضع $4^n+1=3k$ حيث k عدد صحيح.

لنبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1}+1$.

لدينا $4^{n+1}+1=4\times 4^n+1$ و بما أن $4^n=3k-1$ (من الفرضية السابقة) نستنتج أن:

$$4^{n+1}+1=4(3k-1)+1$$

لدينا إذن $4^{n+1}+1=4\times 3k-4+1=3(4k)-3$ و منه $4^{n+1}+1=3(4k-1)$.

لدينا إذن $4^{n+1}+1=3k'$ مع $k'=4k-1$ و هو عدد صحيح. نستنتج أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1}+1$.

و منه فالخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

2. لا يمكننا استنتاج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n فلابد من التحقق من صحتها من أجل $n=0$ لأن وراثية الخاصية تبقى غير كافية.

نلاحظ أن الخاصية غير صحيحة من أجل $n=0$ لأن العدد 3 لا يقسم العدد 2 و بالتالي فهي غير صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

التشفير التآلفي

يستعمل التشفير لإخفاء المعلومات و المراسلات و قد شاع في أيامنا استعمال هذا المصطلح.

تتلخص طريقة التشفير التآلفي في إرفاق كل حرف أبجدي مرقم بعدد x (حيث $0 \leq x \leq 27$ في حالة الأبجدية العربية) بالعدد الطبيعي y باقي قسمة $ax+b$ على 28 أي المعرف بـ $y \equiv ax+b[28]$ حيث a $(a \neq 0)$ و b عددان طبيعيان معلومان فقط من طرف المرسل و المستقبل. تسمى الثنائية $(a;b)$ مفتاح الشفرة.

1. مثال: من أجل $a=3$ و $b=7$ نحصل على الجدول التالي:

الحرف	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	7	10	13	16	19	22	25	0	3	6	9	12	15	18
التشفير	ح	ك	ن	ف	ر	ث	ض	أ	د	ز	ي	م	ع	ق

الحرف	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
x	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
y	21	24	27	2	5	8	11	14	17	20	23	26	1	4
التشفير	ت	ذ	غ	ج	و	ط	ل	س	ص	ش	خ	ظ	ب	هـ

- ما هي الكلمة التي تشفيرها " ك ح ي " ، " ح م ن ض ح ز ط "
- عين تشفيرا للعبارة " خمسة جويلية عيد الاستقلال "

2. تطبيق:

- استعمل المفتاح $(3;5)$ لإنشاء جدول مماثل للسابق.
- استعمل المفتاح $(3;5)$ لفك التشفير و قراءة الرسالة التالية:" وش ك ف ش ض ن ط ز ث ه س و ك ع ش ز "
- قم بتشفير حكمة من الحكم الشهيرة و اطلب من زميلك فكها و قراءتها.

3. ملاحظ هامة

نأخذ الآن $a=7$ و $b=3$

- تحقق مثلا أن $[28]$ $7\times 9+3 \equiv 7\times 1+3$.
- ماذا تستنتج بالنسبة للحرفين ب و ي من الحروف الأبجدية ؟
- عين من بين الحروف الأبجدية، حرفين أو أكثر لهما نفس التشفير.
- عين كل الحروف الأبجدية التي تشفيرها 3.

نلاحظ أنه في هذه الحالة مثلا توجد حروف يتم تشفيرها بنفس الحرف مما يسبب صعوبات بالنسبة لكل من المرسل و المستقبل.

- عين $PGCD(a;28)$. هل العددان a و 28 أوليان فيما بينهما ؟

في الحالة العامة و تجنبا للوقوع في حالة مماثلة للسابقة نختار العدد a أوليا مع العدد 28 في حالة الحروف الأبجدية.

يوم الأسبوع الذي يصادف تاريخا معينا

صادف أول جانفي 2007 يوم الاثنين . انطلاقا من هذا يمكن تحديد يوم الأسبوع الذي يصادف أي يوم من السنوات السابقة أو القادمة.

1) نريد معرفة اليوم نريد الذي صادف خمسة جويلية 1962.

ـ ما هو عدد الأيام n التي تفصل بين أول جانفي 2007 و خمسة جويلية 1962 (لا يحسب إلا أحد التاريخين في المجموع كما تأخذ السنة الكابسة التي عدد أيامها 366) .

ـ بقسمة العدد الموجود سابقا على 7 ، أوجد عدد الأسابيع q التي مرت بين التاريخين.

ـ عين العدد r للأيام المتبقية بعد مرور هذه الأسابيع بين التاريخين. أكتب n بدلالة q و r .

ـ استنتج يوم الأسبوع الذي صادف خمسة جويلية1962.

2) بنفس الطريقة عين يوم الأسبوع الذي يصادف أول نوفمبر من السنة القادمة.

3) ما هو يوم الأسبوع الذي يصادف الاحتفال بمرور قرن عن تاريخ الاستقلال ؟

4) عين يوم الأسبوع الذي صادف أول نوفمبر 1954 ؟

5) ما هو اليوم الذي صادف تاريخ ميلادك ؟

تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر

نهدف إلى تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة العدد الطبيعي 2^n على 5 .

1. وضع تخمين باستعمال المجدول

C2 ▾ fx =MOD(B2;5)

	A	B	C
1	n	2^n	باقي قسمة قوى 2 على n
2	0	1	1
3	1	2	2
4	2	4	4
5	3	8	3
6	4	16	1

أحجز في العمود A الأعداد الطبيعية من 0 إلى 27 . في الخلية $B2$ أحجز $=2^{A2}$ ثم اسحب إلى الأسفل بعد تحديدها. في الخلية $C2$ أحجز $=MOD(B2;5)$ ثم اسحب إلى الأسفل بعد تحديدها.

ماذا تلاحظ ؟ ضع تخمينا.

2. إثبات صحة التخمين

- أنقل ثم أتمم ما يلي: $2^1 \equiv ... [5]$ ، $2^2 \equiv ... [5]$ ، $2^3 \equiv ... [5]$ و $2^4 \equiv ... [5]$.
- استنتج بواقي قسمة 2^n على 5 من أجل $1 \leq n \leq 4$.
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k، $2^{4k} \equiv 1 [5]$ ثم باستعمال خواص الموافقة أ أتمم (بعد نقلها) ما يلي:
  $2^{4k+1} \equiv ... [5]$ ، $2^{4k+2} \equiv ... [5]$ ، $2^{4k+3} \equiv ... [5]$.
- ما هو إذن باقي قسمة 2^n على 5 إذا كان $n = 4k$ ، $n = 4k+1$ ، $n = 4k+2$ و $n = 4k+3$ ؟

3. تطبيقات

- عين بواقي قسمة كل من 2^{1428} و 2^{2007} على 5 .
- عين باقي قسمة العدد $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83}$ على 5 .
- تحقق أن $2007 \equiv 2 [5]$ ثم استنتج باقي قسمة 2007^{2008} على 5 .
- بين أن العدد $3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003}$ يقبل القسمة على 5 .

موضوع محلول

1. عين كل الأعداد الصحيحة قواسم العدد 6.
2. عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $(n-4)$ قاسما للعدد 6.
3. عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $(n+2)$ قاسما للعدد 6.
4. نعتبر العدد الناطق a حيث $a=\frac{n+2}{n-4}$.
   - تحقق أنه من أجل كل صحيح n يختلف عن 4، $a=1+\frac{6}{n-4}$.
   - استنتج الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها a عددا صحيحا.
5. نعتبر العدد الناطق b حيث $b=\frac{n-4}{n+2}$.
   - تحقق أنه من أجل كل صحيح n يختلف عن 2، $b=1-\frac{6}{n+2}$.
   - استنتج الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها b عددا صحيحا.

حل مختصر

1) إذا رمزنا إلى مجموعة قواسم العدد 6 في $\mathbb{Z}$ بـ D_6

فإن $D_6=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$

2) $(n-4)$ قاسم للعدد 6 يعني أن $(n-4)$ ينتمي إلى D_6

$n-4$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
n	-2	1	2	3	5	6	7	10

3) $(n+2)$ قاسم للعد 6 يعني أن $(n+2)$ ينتمي إلى D_6

$n+2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
n	-8	-5	-4	-3	-1	0	1	4

4) لدينا: $1+\frac{6}{n-4}=\frac{n-4+6}{n-4}=\frac{n+2}{n-4}$

و منه $a=1+\frac{6}{n-4}$

يكون إذن a عددا صحيحا إذا و فقط إذا كان $(n-4)$ قاسما لـ 6

أي n عنصر من $\{-2;1;2;3;5;6;7;10\}$

5) لدينا: $1-\frac{6}{n+2}=\frac{n+2-6}{n+2}=\frac{n-4}{n+2}$

و منه $b=1-\frac{6}{n+2}$

يكون إذن b عددا صحيحا إذا و فقط إذا كان $(n+2)$ قاسما لـ 6

أي n عنصر من $\{-8;-5;-4;-3;-1;0;1;4\}$

تعاليق

- لا تنس أنه يتم تعيين قواسم 6 في $\mathbb{Z}$.
- $n-4=n'$ يعني $n=n'+4$.
- $n+2=n'$ يعني $n=n'-2$.
- لإثبات أن $x=y$ يمكن أن تنطلق من y للوصول إلى x.
- نستعمل نتائج السؤال الثالث.
- نعلم أن للعددين الصحيحين -6 و 6 نفس القواسم في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

موضوع مع إرشادات

يتكون رقم الحساب الجاري لإحدى البنوك من 15 رقما ، مرتبة من اليسار إلى اليمين ، يتم تحديدها بالنسبة لكل مشترك وفق النمط التالي:

- الرقم الأول هو إما 1 و إما 2 حسب جنس المشترك.
- الرقمان المواليان هما الرقمان الأخيران الموجودان في سنة ميلاده.
- الرقمان المواليان يعينان شهر ميلاده.
- الرقمان المواليان هما رمز ولاية إقامته.
- الأرقام الستة الموالية هي رقم بطاقة تعريفه الوطنية.
- الرقمان الأخيران هما المفتاح (يمكن أن يكون أول الرقمين من المفتاح معدوما).

يتم تعيين المفتاح (مفتاح المراقبة) كما يلي:

المفتاح هو $97-r$ حيث r هو باقي قسمة العدد المكون من الأرقام الثلاثة عشر الأولى على 97 .

1. تحقق من صحة مفتاح المراقبة الخاص برقم الحساب 89 001 565 33 05 85 2 .
2. أثناء إجراء عملية سحب تم حجز خطأ الرقم 89 001 569 33 05 85 2 (خطأ في الرقم العاشر).

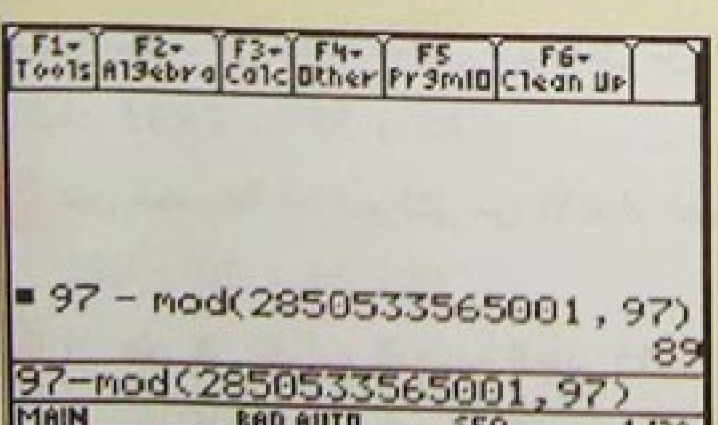
تحقق أن مفتاح المراقبة في هذه الحالة يسمح من اكتشاف وجود خطأ.

3. ليكن B رقم حساب و ليكن A العدد المكون من الأرقام الثلاثة عشر الأولى للعدد B (دون المفتاح).

- أكتب العدد A على الشكل $H\times10^6+L$ حيث $0\le L<10^6$ $(B=2\ 85\ 05\ 33\ 565\ 001\ 89)$.
- بين أن $10^6\equiv 27\ [97]$ ثم استنتج أن للعددين A و $27H+L$ نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 97 .
- باستعمال النتيجة السابقة تحقق من صحة مفتاح المراقبة الخاص برقم الحساب 89 001 565 33 05 85 2 .
- أذكر مثالا لخطأ لا يسمح المفتاح من اكتشاف وجوده.

إرشادات

1. باقي قسمة 001 565 33 05 85 2 على 97 هو 8 و منه المفتاح هو $89=8-97$.



يمكن استعمال حاسبة تسمح من تعيين باقي القسمة مثل $casio\ 89$.

2. المفتاح هو 66 .
3. لاحظ أن $10^6=\left(10^2\right)^3$ ثم نستعمل خواص الموافقة.

نأخذ رقمي حساب لهما نفس الجزء H بحيث يكون لجزأيهما L و L'

نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 97 .

نذكر عل سبيل المثال العددين 89 001 565 33 05 85 2 و 89 098 565 33 05 85 2 .

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

1 من بين الأعداد المقترحة أدناه ، عيّن التي تكون قاسمة للعدد 204 .

2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12.

2 من بين الأعداد المقترحة أدناه ، عيّن مضاعفات العدد 17 .

0 ، 1 ، 17 ، 27 ، 51 ، 86 ، 119 ، 254 .

3 1. ما هو العدد الذي يقبل القسمة على 3 ؟

103 ؛ 206 ؛ 111 ؛ 94 .

2. ما هو العدد الذي يقبل القسمة على 9 ؟

205 ؛ 628 ؛ 525 ؛ 324 .

3. ما هو العدد الذي يقبل القسمة على 2 و 3 ؟

205 ؛ 315 ؛ 261 ؛ 528 .

4. ما هو العدد الذي يقبل القسمة على 2 و 9 ؟

228 ؛ 432 ؛ 357 ؛ 422 .

4 بين أنّ $a-b$ يقبل القسمة على 9 و $a+b$ يقبل القسمة على 11 حيث :

أ - $a=73$ و $b=37$.

ب - $a=86$ و $b=68$.

جـ - $a=32$ و $b=23$.

5 أكتب الأعداد التالية على شكل جداء عوامل أولية .

18 ، 24 ، 46 ، 51 ، 144 .

6 أكتب العدد 35 على شكل جداء عوامل أولية ، استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية لكل من الأعداد التالية: 7×35 ، 35^2 و 35^3 .

7 عين مجموعة القواسم لكل من الأعداد الصحيحة التالية : 20 ، 24 و 75 .

8 1. عيّن كل القواسم الموجبة للعدد 45 .

2. عيّن كل القواسم الموجبة الزوجية للعدد 90 .

3. عيّن كل القواسم الموجبة للعدد 90 والتي هي مضاعفة للعدد 5.

9 عيّن الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون العدد $n+3$ يقبل القسمة على 7 .

10 عيّن الأعداد الصحيحة x التي من أجلها يكون العدد $x-5$ مضاعفا للعدد 11 .

11 عيّن الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون العدد $2n+3$ يقسم 6 .

12 عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $ab=39$.

اشرح لماذا العدد $a+b$ هو عدد زوجي .

13 عين كل الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $x^2-y^2=15$.

14 أ ــ أنشر العبارة $(x-2)(y-3)$.

ب ــ عين كل الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $xy=3x+2y$.

15 1) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a بحيث 7 يكون قاسما للعدد a و $a<50$.

2) ما هي الكسور المساوية لـ $\dfrac{33}{21}$ ، مقام لكل منها يكون عددا طبيعيا أصغر تماما من 50.

2 - القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

16 عين باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b في كل حالة من الحالات التالية :

أ - $a=118$ و $b=5$.

ب - $a=152$ و $b=7$.

جـ - $a=-118$ و $b=5$.

د - $a=-152$ و $b=7$.

17 عين الأعداد الطبيعية n الأصغر من 100 والذي يكون باقي قسمتها على 41 هو 5 .

18 إذا كان $a=13\times21+16$ فما هو باقي قسمة a على 21 ؟ وما هو باقي قسمة a على 13 .

19 x عدد طبيعي باقي قسمته على 23 هو 1 وباقي قسمته على 17 هو 13 .

عيّن x علماً أنّ حاصلي قسمتيه على 23 و 17 متساويان .

20 باقي قسمة عدد طبيعي a على 12 هو 8 .

ما هو باقي قسمة a على 6 ؟ على 4 ؟ على 3 ؟ على 2 ؟

21 باقي القسمة الأقليدية للعدد 524 على عدد طبيعي غير معدوم b هو r وحاصل هذه القسمة هو 15 .
ما هي القيم الممكنة للعددين b و r ؟

22 حاصلا قسمتي عدد طبيعي a على كل من 155 و 161 متساويان بينما باقيا القسمتين هما على التوالي 65 و 23 . عين العدد a .

23 في القسمة الأقليدية للعدد الطبيعي a على العدد الطبيعي غير المعدوم b نحصل على 13 والباقي هو 22 .
عيّن a و b علما أنّ $a-b=538$.

24 عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $351=71x+y$.

3 ـ الموافقات في $\mathbb{Z}$.

25 برر صحة العبارات التالية :

أ ـ $45\equiv 3[7]$. ب ـ $152\equiv 2[3]$.
جـ ـ $29\equiv -1[6]$. د ـ $137\equiv -3[5]$.
و ـ $-13\equiv 2[5]$. هـ ـ $-17\equiv -7[10]$.

تعتبر الموافقة (1) التالية $37\equiv x\,[4]$

26 1. عين خمسة أعداد صحيحة x تحقق الموافقة (1).
2. ما هو العدد الطبيعي الأصغر تماما من 4 ويحقق (1) ؟

27 عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث : $n\equiv 4[7]$.

28 n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .
في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد n التي تحقق الموافقة المقترحة .
أ ـ $46\equiv 0[n]$ ؛
ب ـ $10\equiv 1[n]$ ؛
جـ ـ $27\equiv 5[n]$.

29 أكتب العبارات المعطاة أدناه باستعمال الموافقات بترديد العدد الطبيعي n حيث $n\geq 2$.
$a=13n+4$ ؛ $b=-5n+14$ و $c=111n-34$.

5 ـ خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

30 n عدد صحيح يحقق $n\equiv 140[12]$ ، عين باقي قسمة العدد n على 12 .

31 x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2 .
عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية :
$x+5$ ؛ $x-5$ ؛ $9x$ ؛ $-15x$ ؛ x^3

32 نضع : $a\equiv 30757[10]$ ؛ $b\equiv 15163[10]$ و $c\equiv 12924[10]$.
1) عيّن باقي قسمة الأعداد a ، b و c على 10 .
2) استنتج باقي القسمة الأقليدية على 10 لكل من الأعداد المقترحة أدناه .
أ ـ $a+b+c$ ؛ ب ـ $a-b+c$ ؛
جـ ـ $a+b-c$ ؛ د ـ abc ؛
هـ ـ $ab+ac+bc$ ؛ و ـ $a^2+b^2+c^2$.

33 ما هو باقي قسمة العدد 67 على 11 .
استنتج باقي قسمة العدد 67^{13} على 11 .

34 بيّن أنّ : $6^{2008}\equiv 1[7]$.
استنتج أنّ العدد $8^{2008}-6^{2008}$ يقبل القسمة على 7 .

4 ـ الاستدلال بالتراجع .

35 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

36 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :
$$0^2+1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

37 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :
$$1+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

38 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=0$ و $u_{n+1}=2u_n+1$.
أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n=2^n-1$.

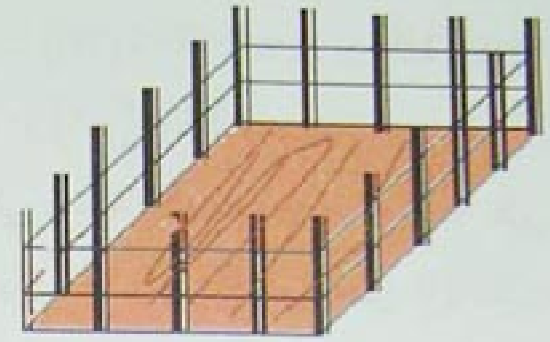
39 n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .
a و b عددان صحيحان حيث $a\equiv b[n]$.
أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p ، $a^p\equiv b^p[n]$.

تمارين

تمارين للتعمق

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

40 بعدا قطعة أرضية مستطيلة الشكل هما $156m$ و $90m$.



يراد إحاطتها بسياج قائم بأوتاد (أعمدة) حديدية المسافة بين كل اثنين منها ثابتة ؛ وغرس وتد في كل زاوية .

علما أن المسافة بين كل وتدين متتاليين ، هي عدد طبيعي مقدر بالمتر ، أقل من $5m$ وأكبر من $2m$.

ـ أحسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط القطعة الأرضية .

41 1) أحسب عدد القواسم الموجبة للعدد 8 ثم عدد القواسم الموجبة للعدد 9.

2) عيّن كل القواسم الموجبة للعدد 8×9.

42 1) كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا .

2) عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 ، وعدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a .

43 عين كل الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $xy-4y-12=0$.

2 - القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

44 ما هو باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 ؟

45 كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا .

كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة ناقصة.

ما هو عدد الأسطر الموجودة على الصفحة الأخيرة ؟

46 علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100}=13k+35$. عين باقي قسمة 100^{100} على 13 .

47 الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما على التوالي 8 و 12.

عين بواقي القسمة الأقليدية لكل من الأعداد $m+n$ ، $m\times n$ و m^2 على 17 .

48 عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n الذي يكون باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع الحاصل .

49 في كل حالة من الحالتين التاليتين ، عيّن حاصل قسمة العدد a على b ثم أحصر a بمضاعفين متتابعين للعدد b .

أ ـ $a=2008$ و $b=21$.

ب ـ $a=-3475$ و $b=53$.

50 أعط حصرا للعدد 326 بمضاعفين متعاقبين للعدد 27 . ثم أحصره بمضاعفين متعاقبين للعدد 12 .

3 - الموافقات في $\mathbb{Z}$ وخواصها

51 كم كانت تشير الساعة حيث :

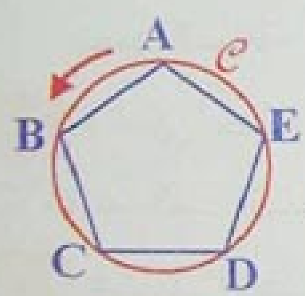
أ ـ بعد 112 الساعة أشارت الثالثة ؟

ب ـ قبل 153 الساعة أشارت الثالثة ؟

(مع ذكر صباحا أم مساء)

52 المضلع المنتظم $ABCDE$ ، محيط بالدائرة $\mathscr{C}$.

M نقطة متحركة على الدائرة ، نقطة انطلاقها هي A .



نفرض الاتجاه المباشر هو اتجاه السهم .

جد نقطة الوصول للنقطة M في كل من الحالتين التاليتين :

أ ـ النقطة M تقطع 15123 قوسا متتابعة في الاتجاه المباشر .

ب ـ النقطة M تقطع 15132 قوسا متتابعة في الاتجاه غير المباشر .

53 عين باقي قسمة العدد 12^{1527} على 5 .

54 عين بواقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد :

371^{238} ؛ 579^{2008} ؛ 1429^{2009} ؛ 1954^{1962} .

55 جد بواقي القسمة الأقليدية على 9 للأعداد :

1754^{12} ، 34572^{457} و 375^{2009} .

56 برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون : $7254^n\equiv0[9]$ ؛ $3532^n\equiv0[2]$ ؛ $1785^n\equiv0[5]$ ؛ $51502^n\equiv0[11]$.

تمارين

57 عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3286^{374} على 10.

58 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون
$3^{2n}-2^{n}\equiv 0[7]$.

59 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :
1) $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$
2) $3^{3n+1}+2^{n+1}$ يقبل القسمة على 5 .
3) $2^{5n+1}+3^{n+3}$ يقبل القسمة على 29 .

60 n عدد طبيعي .
جد ، تبعا لقيم n ، باقي قسمة n^2 على 4 .

61 أ ــ x عدد صحيح . أتمم الجدول التالي :

$x\equiv$	0	1	2	3	4 [5]
$2x\equiv$					[5]

ب ــ استنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث
$2x\equiv 3[5]$.

62 أ - جد باقي قسمة العدد 4^5 على 11 .
ب - استنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد :
37^{5k} ؛ 37^{5k+1} ؛ 37^{5k+2} ؛ 37^{5k+3} و 37^{5k+4} مع
$k\in\mathbb{N}$.

63 1. أ - ما هو باقي قسمة 1999 على 7 ؟
ب - ما هو باقي قسمة 2007 على 7 ؟
2. ليكن العدد الطبيعي n حيث $n\equiv 5[7]$.
أ - عيّن باقي قسمة العدد n^3 على 7.
ب - بيّن أنّ $n^3+1\equiv 0[7]$.
3. m عدد طبيعي حيث $m\equiv 4[7]$.
بيّن أنّ $m^3-1\equiv 0[7]$.
4. بيّن ، بدون حساب ، أنّ 1999^3+2007^3 يقبل القسمة على 7 .

64 الهدف هو إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد $A=n(n^2-1)$ مضاعف للعدد 6 .
1. في كل حالة من الحالات التالية ، أحسب العدد A ثم عيّن باقي قسمة A على 6 : $n=5$ ، $n=16$ ، $n=32$.
2. نفترض أنّ $n\equiv 5[6]$.
أ - ما هو باقي قسمة n^2 على 6.
ب - برّر إذن في هذه الحالة أنّ $n(n^2-1)$ مضاعف لـ 6.
3. أملئ الجدول التالي :

باقي قسمة n على 6	باقي قسمة $n-1$ على 6	باقي قسمة $n+1$ على 6	باقي قسمة n^2-1 على 6	باقي قسمة $n(n^2-1)$ على 6
0	...	...	...	...
1	...	...	...	...
2	...	...	...	...
3	2	4	2	0
4	...	...	...	...
5	...	...	...	...

4. ماذا يمكن استنتاجه ؟

4 - تشفير الكلمات .

في التمارين من 65 إلى 69 نضع $A=\{0,1,2,...,27\}$
ونستعمل الحروف المرقمة كما يلي:

	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

65 نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x\mapsto y$ حيث
y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .
1) شفر الكلمة " **الجزائر** "
2) بين أنه من أجل كل y من المجموعة A يوجد x وحيد في المجموعة A حيث يكون y هو باقي قسمة $x+3$ على 28.
3) حل تشفير كل من الكلمات التالية :
تبضل ؛ لثغوا ثهصاشثث ؛ وذوز .

66 لتشفير كلمة نستعمل الدالة f للمجموعة A في نفسها حيث $f(x)$ هو باقي قسمة العدد $15x+2$ على 28 ، مع اعتبار العدد x هو رتبة الحرف قبل التشفير و $f(x)$ هو رتبة الحرف بعد التشفير .
نستعمل مجدول إكسال للمساعدة : في العمود الأول من A_2 إلى A_{29} نسجل الحروف وأمامها من B_2 إلى B_{29} نسجل أعداد المجموعة A . في الخلية C_2 نحجز الوظيفة =MOD(15*B2+2;28) ؛ وفي الخلية D_2 نحجز الوظيفة

=INDEX($A$2:$B$29;1+C2;1) ؛ ثم نحدد الخليتين معاً ونسحبهما إلى غاية الصف 29 .

أ ـ شفر الكلمة " **رياضيات** ".

ب ـ حل التشفير للكلمة " **عرتناهطت** ".

67 نعتبر الدالة f للمجموعة A في نفسها حيث $f(x)$ هو باقي قسمة العدد $14x+3$ على 28 .

1) شفر الكلمة " **سكر** " . ما هو المشكل المطروح ؟

2) بيّن أنه من أجل كل عددين a و b من المجموعة A، إذا كان $f(a)=f(b)$ ، فإنّ $a-b\equiv 0[2]$.

3) اشرح كيف يمكن اختيار الدالة f حتى يكون تشفير الكلمات وحل تشفير الكلمات ، ممكنا ؟

68 نعرف التشفير بواسطة الدالة f حيث $f(x)$ هو باقي قسمة $11x+6$ على 28 .

1) شفر كلمة " **تلمسان** " .

2) حل تشفير العبارتين التاليتين : **شبكخغ** ؛ **هغخعب** .

69 x عدد طبيعي من المجموعة A و y هو باقي قسمة العدد $7x+5$ على 28 .

باستعمال التحويل $x\mapsto y$ شفر الجمل التاية :

آداب وفلسفة ؛ آداب ولغات أجنبية ؛ علوم تجريبية .

5 ـ الاستدلال بالتراجع .

70 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

71 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0,5$ و $u_{n+1}=(u_n)^2$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

2) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

72 نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ بـــ :

$u_0=2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n=2^{-n}-2n+1$.

73 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 .

74 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n}-1$ مضاعف للعدد 8 .

75 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، $5^n\geq 4^n+3^n$.

76 1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، $3n^2\geq(n+1)^2$.

2) نسمي $P(n)$ الخاصية : " $3^n\geq 2^n+5n^2$ " .

أ ـــ ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من أجله تكون الخاصية $P(n)$ صحيحة ؟

ب ـــ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 5 ، تكون الخاصية $P(n)$ صحيحة .

77 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=4-u_n$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5. أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{2n}=3$ و $u_{2n+1}=1$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع ، $s_n=1+3+5+...+(2n-1)$.

1) أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 . أعط تخمينا لعبارة s_n بدلالة n.

2) لاحظ s_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أحسبه بدلالة n.

3) برهن بالتراجع أنّ $s_n=n^2$.

78 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=n+u_n$.

1) أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) استعمل البرهان بالتراجع لتبرير عبارة u_n بدلالة n.

79 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_1=1$ ، $u_2=3$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

أ ـ أحسب الحدود u_3 ، u_4 و u_5 . أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .

ب ـ برهن بالتراجع هذا التخمين .

80 1. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، n^2-n يقبل القسمة على 2 .

2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n(n^2-1)$ مضاعف للعدد 6 .

مسائل

81 من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع r_n باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 9.

1) أتمم الجدول التالي:

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n							

2) استنتج r_n من أجل كل عدد طبيعي n .

3) عين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 65^n على 9 .

4) استنتج باقي قسمة 65^{2011} على 9 .

82 الهدف التعبير عن u_n بدلالة n .

المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0=7$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=10u_n-18$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 .

لاحظ النتائج هي أعداد تتكون من أرقام وسطها أصفار ؛

أعط العلاقة بين عدد الأصفار و n .

2) أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن بالتراجع هذا التخمين .

83 1) عين باقي القسمة الأقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل القيم من 1 إلى 8 للعدد الطبيعي k .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، الباقي للقسمة الأقليدية للعدد 2^{4n} على 5 هو 1 .

استنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5 .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2^{4n+3}+17^{4n+2}+3$ يقبل القسمة على 5

84 1) عيّن باقي قسمة العدد 4^3 على 11 .

2) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 4^n على 11 .

3) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n}-15^{3n}+22$ يقبل القسمة على 11

2) ما هو باقي قسمة $\left(1995^{3n+1}+26^{12n+2}+7\right)$ على 11 ؟

85 في نظام تحقّق من صحة البضائع توضع لصيقة عليها الترميز بالأعمدة والذي يشمل على 12 الرقم متبوع بالرقم الثالث عشر وهو المفتاح .

4 018474 332 18 9

الجدول التالي يعبّر عن الترميز بالأعمدة :

R	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}

حيث R هو المفتاح ؛ C_1 ، C_2 ، ... ، C_{12} هي أرقام الترميز وهي أعداد طبيعية محصورة بين 0 و 9 .

لمعرفة صحة اللصيقة ، يحسب المفتاح R بالطريقة التالية :

$$3S_i+S_p+R\equiv 0[10]$$

حيث $S_i=C_1+C_3+C_5+C_7+C_9+C_{11}$ ،

$S_p=C_2+C_4+C_6+C_8+C_{10}+C_{12}$.

1. في اللصيقة المعطاة أعلاه لدينا : $R=4$ ، $C_1=0$ ، $C_2=1$ ... إلخ .

تحقق من أنّ الترميز لهذه اللصيقة صحيح .

2. أحسب مفتاح المرفق للترميز التالي :

R	5	1	6	0	3	2	4	2	1	5	3	7

3. بيّن أنّ الترميزين التاليين لهما نفس المفتاح :

R	a	7	b	0	4	1	5	6	3	6	6	2

R	b	7	a	0	4	1	5	6	3	6	6	2

4. عيّن c حتى يكون الترميز على اللصيقة التالية صحيحا.

8	3	9	9	4	2	c	2	0	0	3	4	1

5. في اللصيقة الموالية استبدل رقمين بحرفين d و e .

1	d	e	9	3	6	7	3	5	8	0	2	1

بيّن أنّ : $e\equiv -3b-1[10]$.

استنتج القيم الممكنة للثنائية $(e;d)$.

اختيار من متعدد

86 في كل سؤال اختر الاقتراح الصحيح .

1) أ. $136 \equiv 36[7]$.

ب. $-136 \equiv -60[9]$.

جـ. $2008 \equiv 608[100]$.

د. $17 \equiv 0[-17]$.

2) أ. $100 \not\equiv 0[4]$.

ب. $36 \not\equiv 1[5]$.

جـ. $121 \not\equiv -1[3]$.

د. $21 \not\equiv -21[6]$.

87 في كل سؤال اقتراح من بين الأربعة صحيح عيّنه.

1) $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n .

أ. الخاصية $P(n)$ تكون محققة دوما .

ب. إذا وجد عدد طبيعي n_0 حيث $P(n_0)$ محققة فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، الخاصية $P(n)$ تكون صحيحة .

جـ. $P(3)$ خاصية محققة ومن أجل $k \geq 3$، $P(k+1)$ تنتج من الخاصية $P(k)$ إذن من أجل كل $n \geq 3$ ، $P(n)$ تكون صحيحة .

د. إذا كانت الخاصيتان $P(0)$ و $P(1)$ فنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $P(n)$.

2) مجموعة القواسم الموجبة للعدد 24 هي :

أ. $\{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$.

ب. $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12\}$.

جـ. $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$.

د. $\{2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$.

3) باقي قسمة عدد طبيعي n على 11 يمكن أن يكون :

$\boxed{11}$ $\boxed{22}$ $\boxed{55}$ $\boxed{6}$

صحيح أم خاطئ

88 نعتبر العدد الطبيعي $a = 9720$

ميّز بين الجمل الصيحة والجمل الخاطئة .

1) العدد a يقبل تحليلا إلى جداء عوامل أولية من الشكل : $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 9$.

2) عدد قواسم العدد a هو 40 .

3) العدد 100 يقسم a .

4) العدد 19440 مضاعف للعدد a .

5) العدد 1 هو باقي قسمة العدد a على 5 .

89 أذكر في كل حالة إن كانت الجملة المقترحة صحيحة أم خاطئة .

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي أكبر من 2 حيث $a \equiv b[n]$.

1) $a - b \equiv 0[n]$.

2) $a + 111 \equiv b + 111[n]$.

3) $a^2 \equiv ab[n]$.

4) $na \equiv nb[n^2]$.

5) $a = nk + b$ مع k عدد صحيح .

90 ما قولك في العبارات التالية ؟

1) $a \equiv 4[5]$ إذن $a - 4$ مضاعف للعدد 5 .

2) إذا كان $a \equiv 1[6]$ فإن a^6 يقبل القسمة على 6.

3) بما أن $42 \equiv 0[6]$ فإن $21 \equiv 0[6]$

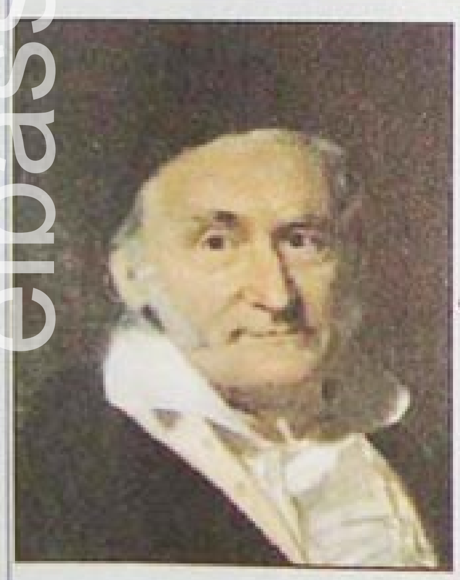
4) إذا كان b قاسما للعدد a فإنه يكون قاسما للعدد a^2 .

5) إذا كان r باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b فإن r^2 هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^2 على b .

المتتاليات 2

الكفاءات المستهدفة

- التمييز بين متتالية و حدها العام.
- التعرف على متتالية بالتراجع.
- حساب الحدود الأولى لمتتالية معرفة بالتراجع.
- تحديد اتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية.
- استعمال المتتاليات الحسابية و الهندسية لحل مشكلات من الحياة اليومية.
- حساب الحد العام و مجموع n حدا الأولى لمتتالية من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$.



كارل فريديريك غوص

1777 م – 1855 م

ولد كارل فريديريك غوص في مدينة برونشفايغ عام 1777 م وتوفى عام 1855 م.

عاش بمدينة غوتنغن حيث التحق بجامعتها ليصبح سنة 1807م أستاذاً ومديراً لمرصدها.

كان غوص معروفاً لأبحاثه المتميزة في حقول الرياضيات والفيزياء وعلم الفلك وعلم قياسات الأرض وعلم فيزياء الأرض، ومازال يعود له الفضل الكبير في عدد من المجالات العلمية في وقتنا الحاضر.

كان غوص عبقريا منذ صغره فقد تعلم بمفرده القراءة و العد و عمره ثلاث سنوات كما أنه أبهر مبكرا أساتذته و يحكى أن أحد الأساتذة، بهدف الاستراحة، كلف تلامذته الذين كان من بينهم غوص و عمره ثمان سنوات، القيام ببعض العمليات الحسابية فاقترح عليهم حساب مجموع الأعداد من 1 إلى 100 إلا أنه بعد لحظات قليلة قدم له غوص الحل الصحيح.

كتب غوص المجموع المطلوب مرتين وذلك بإتباع ترتيبين متعاكسين

$$\begin{cases} 1+2+\dots\dots\dots+99+100 \\ 100+99+\dots\dots\dots+2+1 \end{cases}$$

لاحظ بعد ذلك أنه بتجميع كل عددين عموديا يحصل على نفس المجموع 101 بحيث أن:

$1+100=101$ ، $2+99=101$ ، $3+98=101$ ، ... ، $100+1=101$ و هذا مائة مرة.

توصل هكذا إلى أن $2(1+2+\dots+100)=100\times101$ و منه $1+2+\dots+100=\frac{100\times101}{2}=5050$.

- بإتباع نفس المنهجية أحسب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 1000.

النشاط أول

1. إليك في ما يلي الحدود الأولى لمتتالية " منطقية " (u_n) :

$u_0 = 2$ ، $u_1 = 5$ ، $u_2 = 11$ ، $u_3 = 23$ ، $u_4 = 47$ ، ...

- أنقل ثم أتمم: "" نحصل على حد بالضرب في ... الحد الذي قبله ثم إضافة ... ""
- أحسب الحدين u_6 و u_8.
- من أجل كل عدد طبيعي n، عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n.

2. إليك في ما يلي الحدود الأولى لمتتالية " منطقية " (v_n) :

$v_0 = -5$ ، $v_1 = -2$ ، $v_2 = 1$ ، $v_3 = 4$ ، $v_4 = 7$ ، ...

- أنقل ثم أتمم: "" نحصل على حد بضرب دليله في ... ثم طرح ... ""
- من أجل كل عدد طبيعي n، عبر عن v_n بدلالة n.
- أحسب الحدين v_{2007} و v_{1428}.
- من أجل كل عدد طبيعي n، عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n.

3. إليك، في كل حالة من الحالات التالية، الحدود الأربعة الأولى مرتبة من اليمين إلى اليسار لمتتالية " منطقية ":

أ) -3 ؛ -5 ؛ -7 ؛ -9 ؛ ب) 2 ؛ 4 ؛ 8 ؛ 16 ؛ جـ) -2 ؛ -5 ؛ -11 ؛ -23 ؛

أوجد الحدين المواليين مع الشرح.

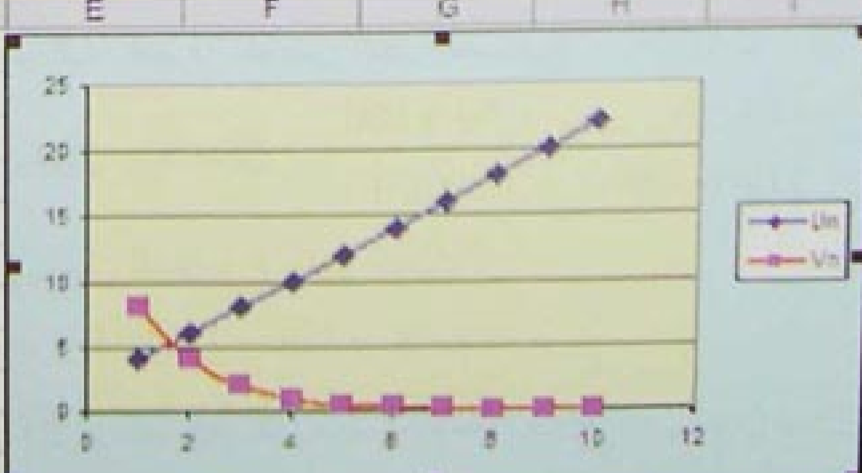
النشاط الثاني

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$v_1 = 8$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = 2(n+1)$ و $v_{n+1} = 0,5v_n$.

1. بين أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. ما هي طبيعة المتتالية (v_n) ؟ أحسب v_n بدلالة n.
3. أحسب بدلالة n المجموعين $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ و $S'_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.
4. باستعمال مجدول اكسال مثل بيانيا المتتاليتين (u_n) و (v_n) للحصول على الشكل الموالي:

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	1	4	8
3	2	6	4
4	3	8	2
5	4	10	1
6	5	12	0,5
7	6	14	0,25
8	7	16	0,125
9	8	18	0,0625
10	9	20	0,03125
11	10	22	0,015625



5. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n). أثبت صحة تخمينك.

النشاط الثالث

يزداد عدد سكان مدينة A بـ 130 نسمة كل سنة في حين يزداد عدد سكان مدينة B بنسبة 2% من سنة إلى أخرى. في سنة 2005 بلغ عدد سكان كل مدينة من المدينتين A و B 6000 نسمة.

1. نمذجة الوضعية

نرمز بـ u_n إلى عدد سكان المدينة A و بـ v_n إلى عدد سكان المدينة B خلال السنة $2005+n$.

- عين u_0 و v_0 ثم أحسب u_1 و v_1.
- أوجد علاقة بين u_{n+1} و u_n. تحقق أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r.
- عبر عن u_n بدلالة n.
- أوجد علاقة بين v_{n+1} و v_n. تحقق أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q.
- عبر عن v_n بدلالة n.
- قارن بين عددي سكان المدينتين A و B في سنة 2010.

2. التخمين باستعمال مجدول أو حاسبة بيانية

- باستعمال حاسبة بيانية أحجز المتتاليتين (u_n) و (v_n) و ذلك باستعمال $(menu\ RECUR)$ بالنسبة للحاسبة $Casio$ و $(\text{mode } Seq)$ بالنسبة للحاسبة Ti.
- أنجز جدولي المتتاليتين كما في الشكل المقابل.
- ابتداء من أي سنة يفوق عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A ؟

n	u(n)	v(n)
3	6390	6367.2
4	6520	6494.6
5	6650	6624.5
6	6780	6757
7	6910	6892.1
8	7040	7030
9	7170	7170.6

n=9

النشاط الرابع

في أول جانفي 2000 أودع نبيل $10\,000\,DA$ ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 5% سنويا. بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ $2000\,DA$.

نرمز بـ u_n إلى رصيد نبيل في أول جانفي من السنة $2000+n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1 و u_2.
2. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,05u_n+2000$.
3. بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+40000$
   - بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1,05$. عين حدها الأول.
   - أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.
   - كم يكون رصيد نبيل في سنة 2010 ؟
5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ و $S'_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$
   - أحسب S'_n بدلالة n.
   - أحسب S_n بدلالة n و S'_n ثم استنتج S_n بدلالة n.

1. تعريف متتالية

تعريف: متتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

ترميز:

* نرمز إلى صورة العدد الطبيعي n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$.
* نرمز إلى المتتالية u بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت معرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.
* نرمز إلى المتتالية u بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.
* يسمى u_n الحد العام للمتتالية u و يسمى u_{n_0} حدها الأول.
* إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$ نرمز إلى حدها الأول بالرمز u_0.

ملاحظة: لابد من التمييز بين متتالية (u_n) و بين حدها u_n الذي هو عدد حقيقي.

2. طرق توليد متتالية

o توليد متتالية بالحد العام

تعريف: يمكن تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بوضع من أجل كل عدد طبيعي n مع $n \geq n_0$، $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرف على $[n_0;+\infty[$.

مثال:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = 2n+1$.

لدينا $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = 2x+1$.

العلاقة $u_n = 2n+1$ تسمح من حساب قيمة كل الحدود و من أجل ذلك يكفي تعويض n على التوالي بـ 0، 1، 2، ...

لدينا: $u_0 = 2\times0+1=1$ ، $u_1 = 2\times1+1=3$ ، $u_2 = 2\times2+1=5$ و هكذا ...

o توليد متتالية بعلاقة تراجعية

تعريف: يمكن تعريف متتالية بالتراجع و ذلك بإعطاء:

1) قيمة الحد الأول.

2) علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية.

مثال:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

تسمح العلاقة $u_{n+1} = 3u_n - 2$ بحساب قيمة الحد u_{n+1} إذا علمت قيمة الحد الذي يسبقه u_n.

معرفة قيمة u_0 تسمح من حساب قيمة u_1 و هكذا فإن $u_1 = 3\times u_0 - 2 = 3\times2-2 = 4$.

معرفة قيمة u_1 تسمح من حساب قيمة u_2 و هكذا فإن $u_2 = 3\times u_1 - 2 = 3\times4-2 = 10$ و هكذا ...

تمرين محلول1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20}.
2. أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

حل:

1. $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$ ، $u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ، $u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$.
2. $u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$ ، $u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$

تمرين محلول2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

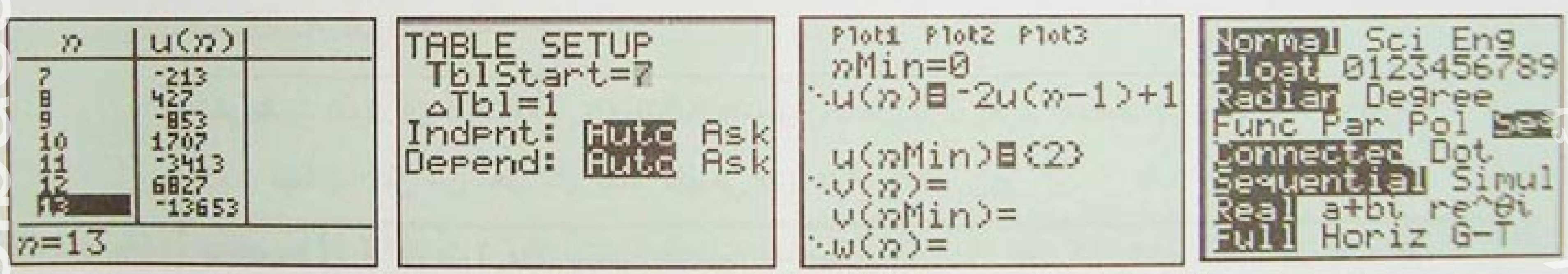
$u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

1. أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .
2. أحسب، باستعمال حاسبة بيانية، u_{10} ، u_{11} و u_{12}.

حل:

1. $u_1 = -2u_0 + 1 = -2\times 2 + 1 = -3$ ، $u_2 = -2u_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 7$ ،
$u_3 = -2u_2 + 1 = -2\times 7 + 1 = -13$.
2. للحصول على حدود متتالية تراجعية بواسطة حاسبة بيانية $(TI\ 83+)$ نتبع المراحل التالية:

$[MODE]$ $[Y\ =]$ $[2nd]$ ثم $[WINDOW]$ $[2nd]$ ثم $[GRAPH]$



نحصل هكذا على: $u_{10} = 1707$ ، $u_{11} = -3413$ و $u_{12} = 6827$.

تمرين محلول3: نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = 2v_n + 5$.

1. أحسب v_1 و v_2.
2. عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1}.

حل:

1. $v_1 = 2v_0 + 3 = 2(-3) + 5 = -1$ و $v_2 = 2v_1 + 5 = 2(-1) + 5 = 3$.
2. $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 5 = 2(2v_n + 5) + 5$

و منه $v_{n+2} = 4v_n + 15$.

من $v_{n+1} = 2v_n + 5$ نستنتج أن $v_n = 2v_{n-1} + 5$ و بالتالي $2v_{n-1} = v_n - 5$

و منه $v_{n-1} = \dfrac{v_n - 5}{2}$.

المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

1.المتتالية الحسابية

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p + (n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

بصفة عامة:

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}$$

خاصية3: تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

2.المتتالية الهندسية

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n)متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

بصفة عامة:

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{1 - \text{الأساس أس عدد الحدود}}{1 - \text{الأساس}}.$$

حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$.

خاصية3: تكون الأعداد غير المعدومة a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c .

تمرين محلول1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r.

حل:

1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1)+2] - [-3n+2] = -3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

3. لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

تمرين محلول2: (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

حل:

1. $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$ ، $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$.
2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.
3. $S = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3(1-2^n) = 3(2^n - 1)$.

تمرين محلول3: بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.
نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة.
2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

حل: لنرمز بـ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة السنة $2005 + n$ و منه $u_0 = 3000$ و $u_2 = 3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005 + n$ و عدد السكان خلال السنة الموالية هي: $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1+\alpha)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$ و منه $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1,21$ و بالتالي $q = 1,1$. نستنتج أن $\alpha = 0,1 = 10\%$.

2. نلاحظ أن $2030 = 2005 + 25$. لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ و منه $u_{25} = 3000 \times (1,1)^{25}$ أي $u_{25} \approx 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

ـ المتتالية الرتيبة

1. اتجاه تغير متتالية

تعاريف: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول عن (u_n) أنها متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geq u_n$.
2. القول عن (u_n) أنها متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \leq u_n$.
3. القول عن (u_n) أنها ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n$.
4. القول عن (u_n) أنها رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

ملاحظات:

* تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

* توجد متتاليات ليست متزايدة و ليست متناقصة. نقول عنها أنها غير رتيبة و نذكر على سبيل المثال المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

* تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا و جد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = k$.

2. اتجاه تغير متتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها r.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = r$ و منه:

- إذا كان r سالبا تماما $(r < 0)$ فإن المتتالية متناقصة تماما.
- إذا كان r موجبا تماما $(r > 0)$ فإن المتتالية متزايدة تماما.
- إذا كان r معدوما $(r = 0)$ فإن المتتالية ثابتة.

3. اتجاه تغير متتالية هندسية

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها q.

نعلم أن $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$ و $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1)$ و منه:

- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.
- إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- إذا كان $q < 0$ فإن الفرق $u_{n+1} - u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة و منه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

تمرين محلول1: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.
2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... و إنما يجب المقارنة بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

حل:

1. $u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - (n+1)\right] - (n^2 - n)$ و منه $u_{n+1} - u_n = 2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n \geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

تمرين محلول2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$u_1 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

حل:

إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} \leq u_n$.

المرحلة الأولى: نتحقق من أن: $u_2 \leq u_1$

لدينا $u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$ و منه $u_2 \leq u_1$.

المرحلة الثانية: نفرض أنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} \leq u_n$.

المرحلة الثالثة: نبرهن أن $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} \leq u_n$. نحصل بعد ضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$. نضيف (-1) إلى الطرفين لنجد:

$\frac{1}{2}u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}u_n - 1$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} \leq u_n$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

تمرين محلول3: لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.
2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

حل:

1. $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3 \times 3^n}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}v_n$. و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$
2. بما أن $\frac{3}{2} > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$.

ـ المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 0$ و $b \neq 0$)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول u_1 و بالعلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

1. الحالة الأولى $a = 1$

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = u_n - 3$.

- من الواضح أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$ و حدها الأول $u_1 = 2$.
- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n = u_1 + (n-1)r$ و منه $u_n = 5 - 3n$.
- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n(7-3n)}{2}$
- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} - u_n = -3$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة.

2. الحالة الثانية $a \neq 1$ و $u_0 = \frac{b}{1-a}$

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = -3$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

- حساب الحدود الأولى يعطينا: $u_2 = -3$ و $u_3 = -3$، ... نخمن أن المتتالية (u_n) ثابتة.
- لنبين بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n = -3$.

* الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$ لأن $u_1 = -3$.

* نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ أي أن $u_n = -3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(-3) + 3 = -3$ و منه $u_{n+1} = -3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$. إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = nu_1$ و منه $S_n = -3n$.

3. الحالة الثالثة $a \neq 1$ و $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$

لحساب الحد العام u_n و المجموع $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ نستعين بالمتتالية ذات الحد العام $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام: $v_n = u_n + 3$.

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 3 + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $v_{n+1} = 2v_n$. نستنتج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_1 = 4$.

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$ و $u_n = v_n - 3 = 4 \times 2^{n-1} - 3$.
- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $S'_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = -4(1-2^n)$. لدينا $u_n = v_n - 3$

و منه $S_n = (v_1 - 3) + (v_2 - 3) + ... + (v_n - 3) = (v_1 + v_2 + ... + v_n) - (3 + 3 + ... + 3) = S'_n - 3n$

نستنتج هكذا أن $S_n = -4(1-2^n) - 3n$.

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$ و منه للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس اتجاه التغير.

تمرين محلول: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض $\alpha=3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.

ب) نفرض $\alpha=2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

حل:

أ) $\alpha=3$ و منه $u_0=3$

• لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=3$.

* الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=3$.

* نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي أن $u_n=3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ و منه $u_{n+1}=3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

• من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=u_0+u_1+...+u_n=(n+1)u_0$ و منه $S_n=3(n+1)$.

ب) $\alpha=2$ و منه $u_0=2$

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ $(v_0=u_0-3)$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n=u_n-3$ و منه $u_n=v_n+3$. إذن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. لدينا $S=(v_0+3)+(v_1+3)+...+(v_n+3)=(v_0+v_1+...+v_n)+(3+3+...+3)$

و منه $S=S'+3(n+1)$ حيث $S'=v_0+v_1+...+v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S'=(-1)\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

النمو الديموغرافي

في أول جانفي 2005، بلغ عدد سكان إحدى المدن 100 000 نسمة.

ملاحظة: (الفرعان 1 و2 مستقلان)

1. نفرض أن عدد سكان هذه المدينة يرتفع سنويا بنسبة قدرها 3% و نرمز بـ u_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.

- ما هي قيمة u_0 ؟ أحسب u_1 و u_2.
- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,03\times u_n$. استنتج طبيعة المتتالية (u_n).
- عبر بدلالة n عن u_n.
- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).
- باستعمال حاسبة بيانية عين ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

2. نفرض أن عدد الوفيات هو نفسه عدد الولادات بهذه المدينة إلا أنه و نظرا لنشاطها الاقتصادي المتميز فإن 5000 شخص إضافي يستقرون بها سنويا.

نرمز بـ v_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.

- ما هي قيمة v_0 ؟ أحسب v_1 و v_2.
- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n. استنتج طبيعة المتتالية (v_n).
- عبر بدلالة n عن u_n.
- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).
- ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

تطور نسبة الزبائن

بلغ عدد زبائن أحد مستوردي السيارات 1000 زبون خلال سنة 1999. لاحظ المستورد في السنة الموالية أنه احتفظ بنسبة 40% من زبائنه و أضيف إليهم، بفضل الإشهار، 630 زبون جديد.

نفرض أن تطور الزبائن يتواصل بنفس الكيفية السابقة خلال السنوات العشر الموالية.

نرمز بـ u_n إلى عدد الزبائن خلال السنة $1999+n$ حيث n عدد طبيعي.

1. أحسب u_1 و u_2.

2. عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n=u_n-1050$.

- أحسب v_0، v_1 و v_2. خمن طبيعة المتتالية (v_n).
- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها.
- عبر بدلالة n عن v_n ثم u_n.

4. ما هو عدد الزبائن المتوقع خلال سنة 2008 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

5. باستعمال حاسبة بيانية، هل يظهر ممكنا بلوغ عدد زبائن هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تواصل تطور الزبائن على نفس المنوال ؟

تمرين محلول: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض $\alpha=3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.

ب) نفرض $\alpha=2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

حل:

أ) $\alpha=3$ و منه $u_0=3$

- لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=3$.

* الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=3$.

* نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي أن $u_n=3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ و منه $u_{n+1}=3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

- من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=u_0+u_1+...+u_n=(n+1)u_0$ و منه $S_n=3(n+1)$.

ب) $\alpha=2$ و منه $u_0=2$

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ $(v_0=u_0-3)$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n=u_n-3$ و منه $u_n=v_n+3$. إذن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. لدينا $S=(v_0+3)+(v_1+3)+...+(v_n+3)=(v_0+v_1+...+v_n)+(3+3+...+3)$

و منه $S=S'+3(n+1)$ حيث $S'=v_0+v_1+...+v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S'=(-1)\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

تخمين عبارة الحد العام ثم إثباتها

دراسة مثال:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

- **تخمين عبارة u_n**

1. أنجز و أتمم ورقة الحساب الموالية و ذلك بإتباع الخطوات التالية:

- أحجز في السطر 1 الأعداد الطبيعية ابتداء من 0.
- أحجز في الخلية $B2$ العدد 0 و هو يمثل قيمة الحد الأول.
- أحجز في الخلية $C2$: $=2*B2+1$ و هو يمثل قيمة الحد الثاني.
- حدد الخلية $C2$ ثم اسحب إلى اليمين.
- أحجز في الخلية $B3$: $B2+1$ للحصول على $u_n + 1$ و ليس u_{n+1}.
- حدد الخلية $B3$ ثم اسحب إلى اليمين.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Un	0	1	3											
Un+1	1	2												

ملاحظة: يمكنك استعمال حاسبة بيانية عوض مجدول.

2. خمن عبارة $u_n + 1$ بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

- **إثبات صحة التخمين**

* **الطريقة الأولى: استعمال الاستدلال بالتراجع**

أثبت باستعمال البرهان بالتراجع تخمينك الخاص بعبارة u_n بدلالة n.

* **الطريقة الثانية: استعمال متتالية مساعدة**

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + 1$.

- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.
- قارن مع تخمينك.

تطبيق:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n - 10$.

1. أنجز و أتمم ورقة الحساب الموالية و ذلك بإتباع نفس الخطوات السابقة:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Un	6	8									
3	Un-5											

2. خمن عبارة $u_n - 5$ بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3. اثبت صحة تخمينك بإتباع طريقتين مختلفتين.

موضوع محلول

(v_n) متتالية حدها الأول v_0 موجب تماما وحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-v_n=0,02v_n$.

1. أ - بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها . ما هو اتّجاه تغيّر هذه المتتالية ؟

ب - عبّر عن v_n بدلالة n و v_0 .

2. نضع : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

أ - أحسب S_n بدلالة n و v_0 .

ب - أحسب $(1,02)^{35}$ ، ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n \geq 50v_0$.

3. بلغ عدد سكان بلد بـ 30 مليون نسمة يوم 1 جانفي 2000 ، نفرض أن عدد السكان يرتفع كل سنة بنسبة 2% .

كم يبلغ عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 2020 ؟

حل مختصر

1. أ - ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، $v_{n+1}-v_n=0,02v_n$

معناه $v_{n+1}=1,02v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,02$.

بما أن $q>1$ و v_0 موجب تماما فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماما .

ب - لدينا $v_n=v_0q^n$ أي $v_n=v_0(1,02)^n$.

2. أ - $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\dfrac{q^n-1}{q-1}$

أي $S_n=v_0\dfrac{(1,02)^n-1}{0,02}=50v_0\left[(1,02)^n-1\right]$.

ب - $(1,02)^{35}\approx 1,9998$.

$S_n\geq 50v_0$ معناه $50v_0\left[(1,02)^n-1\right]\geq 50v_0$ ومعناه $(1,02)^n-1\geq 1$

أي $(1,02)^n\geq 2$.

ولدينا $(1,02)^{36}\approx 2,0398$ إذن $n\geq 36$.

3. نفرض أنّ عدد السكان هو u_n في السنة n بما أنّه يرتفع بنسبة 2% فإنّ $u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{100}u_n$ أي $u_{n+1}=1,02u_n$ ومنه المتتالية (u_n) هي نفسها المتتالية (v_n) .

في يوم 1 جانفي 2000 لدينا $v_0=30$ مقدرا بالمليون نسمة ، وفي يوم 1 جانفي 2020 يكون v_{20} إذن $v_{20}=v_0(1,02)^{20}=30\times(1,02)^{20}$

أي $v_{20}\approx 44,578422$ مقدر بالمليون نسمة .

تعاليق

استعمال مباشرة التعريف لمتتالية هندسية .

لدراسة اتّجاه التغيّر لمتتالية نطبق خواص حول المتتالية الهندسية كما يمكن دراسة إشارة العبارة $u_{n+1}-u_n$.

لحساب المجموع لاحظ عدد الحدود هو n .

للحساب استعمل آلة حاسبة .

لتعيين n يجب حساب $(1,02)^{36}$ لأن $(1,02)^{35}$ لا تحقق النتيجة المحصل عليها .

من 1 جانفي 2000 إلى 1 جانفي 2020 توجد 20 سنة .

موضوع مع إرشادات

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0,6u_n - 1,2$.

1. أ- برهن بالتراجع أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

ب- برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -3$.

جـ- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $|u_n| < 3$.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 3$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها .

ب- أحسب بدلالة n ، عبارة الحد v_n ثم استنتج عبارة الحد u_n بدلالة n .

3. من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n .

ب- استنتج بدلالة n المجموع $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

إرشادات

1. أ- تحقق من أن $u_1 \le u_0$ ثمّ بين أنه إذا كان $u_{p+1} \le u_p$ فإنّ $u_{p+2} \le u_{p+1}$.

ب- ضع $P(n)$ الخاصية $u_n > -3$ ثم استعمل مرة ثانية الاستدلال بالتراجع .

جـ- من البديهي إذا كانت متتالية متناقصة فإن حدها الأول يكون أكبر من كل الحدود الباقية وتذكر $|x| < a$ مع a حقيقي موجب تماما .

2. أ- للبرهان أنّ (v_n) متتالية هندسية استعمل التعريف واحسب v_{n+1} بدلالة v_n .

ب- بالنسبة لحساب v_n تطبيق مباشر لعبارة الحد العام لمتتالية هندسية ولحساب u_n استعمل العبارة المعطاة .

3. أ- حساب S_n بدلالة n يتمّ بتطبيق مباشر لمجموع حدود متتالية هندسية.

ب- لحساب المجموع T_n بدلالة n استعمل العلاقة المعطاة $v_n = u_n + 3$ ثم قم بالتعويض بالعبارة المحصل عليها للمجموع S_n .

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - المتتاليات العددية

1 أحسب الحدود الخمس الأولى للمتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : أ ـ $u_n = \frac{1}{n+1}$.

ب ـ $u_{n+1} = 3u_n + 1$ ، $u_0 = -2$.

2 تعطى الدالة u المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u(n) = -2n^2+5$.

أ - أحسب الصورّ للعداد 0 ، 1 و 2 بالدالة u .

ب - أحسب الأعداد $u(13)$ ، $u(50)$ و $u(100)$.

جـ - أكتب بدلالة n $u(n+1)$ ثمّ $u(2n)$

3 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ و $u_{n+1}=3-2u_n$.

أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

أحسب الحد u_{10} (يمكن استعمال حاسبة أو مجدول) .

4 جد الأعداد الناقصة في كل من المتتاليات المنتهية التالية ؛ ثمّ أكتب علاقة تربط بين الحدود .

أ- 0 ؛ 5 ؛ 3 ؛ 8 ؛ 6 ؛ 11 ؛ ؟ ؛ 14 ؛ 12 .

ب- -2 ؛ 1 ؛ 7 ؛ 19 ؛ 43 ؛ 91 ؛ ؟ .

جـ- 2 ؛ 5 ؛ $\frac{7}{2}$ ؛ $\frac{17}{4}$ ؛ $\frac{31}{8}$ ؛ $\frac{65}{16}$ ؛ $\frac{127}{32}$ ؛ ؟ .

2 - المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

5 (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=7$ وأساسها -3 .

أحسب الحد الرابع عشر .

أحسب المجموع : $S=u_0+u_1+...+u_{13}$.

6 (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1=-\frac{3}{2}$ وأساسها $\frac{3}{2}$. احسب الحد الرابع والثلاثين .

أحسب $S=u_0+u_1+...+u_{33}$.

7 (u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n على الترتيب بـ : $v_n=3u_n-1$ و $w_n=u_{2n}+3$.

بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) حسابيتان مطلوب تعيين الأساس لكل منهما .

8 أحسب المجموع $S=u_0+u_1+...+u_{10}$ علما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{2^n}{3}$.

9 أحسب المجموعين التاليين :

$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{59049}$ ؛

$S=1+2+4+...+16384$.

10 أدرس اتجاه تغيّر المتتاليات المعرفة بالحد العام u_n في كل من الحالات المقترحة أدناه :

أ - $u_n=\frac{1}{2}n+3,5$ ؛ ب - $u_n=-\frac{1}{3}n+5$ ؛

جـ - $u_n=4-3n$ ؛ د - $u_n=\frac{n}{5}-2$.

11 أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام v_n .

أ - $v_n=2\times3^n$ ؛ ب - $v_n=\frac{2^n}{3}$ ؛

جـ - $v_n=-\frac{4}{5^n}$ ؛ د - $v_n=-\frac{2^{n+2}}{3^n}$.

3 - اتّجاه تغيّر ورتابة متتالية .

12 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{1-n^2}{n}$.

1) أدرس إشارة العبارة $u_{n+1}-u_n$ ، استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أعط دالة f تحقق $u_n=f(n)$. باستعمال اتجاه تغير الدالة f تحقق من النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق .

13 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{-2n^2+3n+1}{n}$.

1) أدرس إشارة العبارة $u_{n+1}-u_n$ ، استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أعط دالة f تحقق $u_n=f(n)$. باستعمال اتجاه تغير الدالة f تحقق من النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق .

14 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=-3n^2-3n+\frac{5}{4}$

أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) باستعمال التعريف ثم باستعمال الدالة المرفقة لها .

15 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n=\frac{4^n}{n^2}$.

تمارين

1) أحسب العبارة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

16 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = \frac{2^n}{n^2}$

1) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > 0$

2) أثبت أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $n^2 - 2n - 1 > 0$ ،

3) احسب العبارة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. استنتج أنه ابتداء من الحد الثالث تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

17 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

أ - $u_n = \frac{1-n}{2n+1}$ ؛

ب - $u_n = \frac{0,75^n}{n^3}$ حيث $n \geq 1$ ؛

ج - $u_n = n^2 + 2n + 5$ ؛

18 نفس المطلوب للتمرين السابق .

أ - $u_n = \frac{2}{n^2 + 2n + 5}$ ؛ ب - $u_n = (-3)^n$ ؛

ج - $u_n = 2^n - 4$.

4 - المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

19 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 1$.

أ – عبّر عن v_{n+1} بدلالة v_n .

ب – بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية .

20 (u_n) ، (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}$ و $v_n = u_n + 1$.

أ - أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية .

ب - أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج بدلالة n عبارة u_n.

21 1) (u_n) متتالية معرّفة كما يلي : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

أ - أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب - أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج بدلالة n عبارة u_n.

تمارين للتعمّق

1 - المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

22 بكالوريا

(v_n) متتالية حسابية حيث : $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$.

1) عين أساس المتتالية وحدها الأول v_0.

2) أحسب v_n بدلالة n. ثم عين العدد الطبيعي n حيث : $v_n = 50$.

3) أحسب المجموع : $S = v_6 + v_7 + ... + v_{94}$.

23 بكالوريا

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$

1) عين الحدود v_1 ، v_2 و v_2 للمتتالية وأساسها.

2) أحسب الحد العام v_n بدلالة n .

3) عبر بدلالة n عن المجموع :

$S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

4) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = -10$

24 بكالوريا

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 .

1) احسب حدها الثاني u_2 علما أنّ : $u_1 + u_3 = 12$.

2) احسب الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.

3) عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1 .

4) اكتب الحد العام u_n بدلالة n ثم عيّن n بحيث يكون : $u_n = 32$.

5) احسب : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

25 بكالوريا

(u_n)متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة : $u_2 + u_5 = 25$.

1) عين أساس المتتالية الحسابية (u_n).

2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3) أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11 .

4) أحسب المجموع : $S = v_1 + v_2 + ... + v_{10}$.

26 بكالوريا

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية حيث : $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$

تمارين

1) أوجد الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية .

2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع :

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

4) أوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 78$.

27 بكالوريا

(u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 و u_2 يساوي 19.

1) احسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2

2) احسب الحد العام u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

ثم استنتج المجموع S_6 (يعطى S_6 على شكل كسر غير قابل للاختزال)

28 في أول يناير 2000 وضع أحمد $500DA$ في بنك بدون فوائد ، ثم في أول كل شهر بانتظام ، أضاف $50DA$ زيادة على المبلغ المدفوع في الشهر السابق

نسمي u_1 المبلغ مقدرا بالدينار لأول دفع و u_n المبلغ المدفوع في الشهر رقم n .

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) ما هو المبلغ الذي يضعه أحمد في أول ديسمبر 2007 ؟

3) ما هو المبلغ الذي جمعه أحمد في رصيده إلى غاية 31 ديسمبر 2007 ؟

29 يوجد بمحطة توزيع البنزين $32000L$ من البنزين يريد صاحب المحطة توزيع هذه الكمية خلال 10 أيام .

باع في اليوم الأول $5000L$ ثم قرر أن ينقص من البيع في كل يوم نفس الكمية .

ما هي الكمية التي يجب تخفيضها يوميا حتى لا يوجد بنزين بعد 10 أيام ؟

30 عدد السكان لبلد في سنة 1990 هو 45,4 مليون نسمة ؛ انتقل إلى 52,6 مليون نسمة في سنة 2002

نسمي v_0 عدد السكان في 1990 و v_n عدد السكان بعد n سنة . نفرض أن عدد السكان يتزايد كل سنة بتزايد ثابت r .

1) أحسب التزايد r .

2) ما هو عدد السكان هذا البلد في عام 2020 ؟

2 - اتجاه تغيّر ورتابة متتالية .

31 1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0,9u_n - 13$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

32 أجب على نفس الأسئلة للتمرين السابق مع $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

33 a عدد حقيقي كيفي . نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = a$ و $u_{n+1} = 2,5u_n - 1,5$.

بين أنه:

أ ــ إذا كان $a = 0$ فإن المتتالية (u_n) تكون متناقصة.

ب ــ إذا كان $a = 1$ فإن المتتالية (u_n) تكون ثابتة.

ج ــ إذا كان $a = 2$ فإن المتتالية (u_n) تكون متزايدة.

34 (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$u_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$.

1) بيّن أنّ (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدّها الأول u_1 و أساسها r .

استنتج اتجاه تغيراتها .

2) احسُب بدلالة n المجموع

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 1$.

3 - المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

35 لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 1)$.

1) عيّن الحدّ الأوّل u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نضع $u_0 = 4$ و $v_n = 2u_n + 1$.

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها . أحسب حدّها الأول v_0.

ب - استنتج v_n بدلالة n ، ثمّ u_n .

36 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ :

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n}{4} + 2$.

1) أرسم المستقيمين $\mathcal{D}$ ذي المعادلة $y = \frac{3}{4}x + 2$ و Δ ذي المعادلة $y = x$ في معلم متعامد ومتجانس .

عيّن A نقطة تقاطعهما ولتكن α فاصلة النقطة A.

2) أ - أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ثم مثّل هذه الحدود على محور الفواصل .

ب - أنشئ هندسيا الحدّين u_4 و u_5 .

3) نضع $v_n = u_n - \alpha$.

أ - أحسب v_0 ثمّ v_1 و v_2 .

ب - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها.

جـ - استنتج v_n بدلالة n ، ثمّ u_n بدلالة n.

37 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_{n+1} = au_n + b$ ، مع $a \neq 0$ و $a \neq 1$ والحدّ الأول u_0 .

نسمي α فاصلة A نقطة تقاطع المستقيمين الذين معادلتيهما $y = x$ و $y = ax + b$.

1) بيّن أنّه إذا كان $u_0 = \alpha$ فإنّ المتتالية (u_n) تكون ثابتة.

2) في ما يلي نفرض أنّ $u_0 \neq \alpha$.

برهن أن المتتالية (v_n) المعرّفة بـ $v_n = u_n - \alpha$ هي متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها.

3) عبّر عن v_n بدلالة n و v_0 ، ثمّ u_n بدلالة n و u_0 .

مسائل

38 بكالوريا

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها 2 .

أ. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ب. احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حيث $v_5 = 32$ و $v_8 = 256$.

أ. عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول v_0 ، ثم اكتب حدها العام v_n بدلالة n.

ب. احسب المجموع $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

3) نعتبر المتتالية العددية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2^n + 2n + 1$.

احسب بدلالة n ، المجموع $T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$.

39 تعاقد أحمد مع بنك لقرض مبالغ مالية لمدة 10 سنوات ، في السنة الأولى يقرض $9000\,DA$ شهريا ثم يزيد القرض في كل سنة بنسبة 3% . نسمي u_n المبلغ الذي يقرضه أحمد شهريا في السنة n .

1) ما هو المبلغ المقترض شهريا في السنة الثانية ؟

2) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب أساسها .

3) كم يصبح المبلغ المقترض شهريا في السنة العاشرة ؟

4) ما هو المبلغ الكلي الذي اقترضه أحمد خلال العشر سنوات ؟

40 السعر p_0 لبضاعة في تزايد بنسبة 5% سنويا .

1) أحسب p_1 سعر البضاعة خلال سنة ، و p_2 سعرها خلال سنتين ، و p_n سعرها خلال n سنة ، بدلالة p_0 .

2) خلال كم سنة يصبح سعر البضاعة أكثر من الضعف ؟

41 في سنة 2000 كان عدد سكان قرية 526 نسمة ، ولأسباب معينة بدأ يتقلص بنسبة 2% في كل سنة .

نضع : $u_0 = 526$ ، u_1 عدد السكان لسنة 2001 و u_n عدد السكان هذه القرية بعد n سنة.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل n عدد طبيعي . استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) ما هو عدد سكان هذه القرية في سنة 2009؟

4) ما هي السنة التي يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف ؟

5) أحسب u_{310} ، u_{311} أعط تفسيرا للنتيجتين .

ابتداء من أي سنة تصبح القرية فارغة من السكان ؟

تعطى النتائج مقربة إلى عدد طبيعي.

42 يقترح أحمد على عمر عقدين لكراء مسكن لمدة 8 سنوات . يدفع عمر $5000\,DA$ في السنة الأولى

1) في العقد الأول ، ثمن الكراء يزداد كل سنة بقيمة ثابتة $150\,DA$.

نضع u_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن u_2 .

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب u_8 .

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

2) في العقد الثاني ثمن الكراء يزداد كل سنة بنسبة 3% .

نضع v_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن v_2 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب v_8.

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات .

3) ما هو العقد الذي يختاره عمر .

اختيار من متعدد

43 في كل سؤال اختر الاقتراح الصحيح .

1) المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n هي متتالية متناقصة .

أ- $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = u_n + 0{,}1$.

ب- $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

جـ- $u_n = \frac{1}{n+1}$.

د- $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$.

2) المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n هي متتالية هندسية

أ- $u_n = -3n + 1$ ؛

ب- $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = -3u_n$.

جـ- $u_n = n + \frac{1}{2}$ ؛

د- $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 1$.

44 في كل سؤال اقتراح من بين الأربعة صحيح عيّنه.

1) (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n = \frac{1}{n}$

أ- (u_n) متتالية هندسية ؛

ب- (u_n) متتالية حسابية ؛

جـ- (u_n) متتالية متناقصة ؛

د- (u_n) متتالية متزايدة .

2) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 3$ و $v_n = u_n + 1$

أ- (v_n) متتالية متقاربة.

ب- (u_n) متتالية متقاربة.

جـ- (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 .

د- (u_n) متتالية هندسية أساسها 4 .

صحيح أم خاطئ

45 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) معرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = \frac{1}{2}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$ و $v_n = u_n + 4$.

ميّز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة .

1) (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

2) (u_n) متتالية حسابية أساسها -2 .

3) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

4) (v_n) متتالية حسابية أساسها 4.

5) (v_n) متتالية هندسية متزايدة .

46 أذكر في كل حالة إن كانت الجملة المقترحة صحيحة أم خاطئة .

(u_n) هي المتتالية المعرفة بحدها العام $\frac{2n-3}{n+1}$.

1) (u_n) متتالية متناقصة .

2) المتتالية (u_n) متزايدة .

3) المتتالية (u_n) حسابية أساسها يختلف عن -1 .

4) المتتالية (u_n) هندسية أساسها 2.

5) المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ متناقصة .

47 ما قولك عن العبارات التالية ؟

1) توجد متتالية في نفس الوقت حسابية وهندسية .

2) إذا كان أساس المتتالية الهندسية موجب فتكون متزايدة ، وإذا كان أساسها سالبا فتكون متناقصة .

3) كل متتالية ثابتة هي هندسية وحسابية في آن واحد .

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_0 q^n$ إذن (u_n) متتالية هندسية .

5) تكون (u_n) متتالية هندسية حيث حدودها غير معدومة وأساسها q إذا وفقط إذا ، تحقق من أجل كل عددين طبيعيين m و n ، $\frac{u_m}{u_n} = q^{m-n}$.

3 اتجاه تغير دالة 3

الكفاءات المستهدفة

- تعيين اتجاه تغير دالة باستعمال إشارة الدالة المشتقة.
- الربط بين جدول التغيرات و المنحني الممثل للدالة.

دار الحكمة

عرف عن أبي جعفر المنصور عنايته بنشر العلوم المختلفة، ورعايته للعلماء من المسلمين وغيرهم، وقيامه بإنشاء "بيت الحكمة" في قصر الخلافة ببغداد، وإشرافه عليه بنفسه، ليكون مركزا للترجمة إلى اللغة العربية. وقد أرسل أبو جعفر إلى إمبراطور الروم يطلب منه بعض كتب اليونان فبعث إليه بكتب في الطب والهندسة والحساب والفلك، فقام نفر من المترجمين بنقلها إلى العربية.

وفي عهد هارون الرشيد جاءته دفعة كبيرة من الكتب بعد فتح هرقلية وإقليم بيزنطة ، وقد أوكل إلى يوحنا بن ماسويه مهمة ترجمة الكتب ، فلم تعد تقتصر على حفظ الكتب بل وضم بيت الحكمة إلى جانب المترجمين الناسخين والخازنين الذين يتولون تخزين الكتب، والمجلدين وغيرهم من العاملين.

وقد بلغ نشاط بيت الحكمة ذروته في عهد الخليفة المأمون الذي أولاه عناية فائقة، ووهبه كثيرا من ماله ووقته، وكان يشرف على بيت الحكمة ، ويُختار من بين العلماء المتمكنين من اللغات. وقد استقدم المأمون من قبرص خزانة كتب الروم.

وبذلك كان بيت الحكمة خزانة كتب ، ومركز ترجمة ، والتأليف و مركز للأبحاث ورصد النجوم ، ومن أهم ما ميز بيت الحكمة هو تعدد المصادر وهي الكتب القديمة و التراجم و الكتب التي الفت للخلفاء و الكتب التي نسخت من ما جعلها مجمعا علميا وظل بيت الحكمة قائما حتى اجتاح المغول بغداد سنة (656هـ = 1258م)حيث تم تدمير معظم محتويات بيت الحكمة في ذلك الوقت.

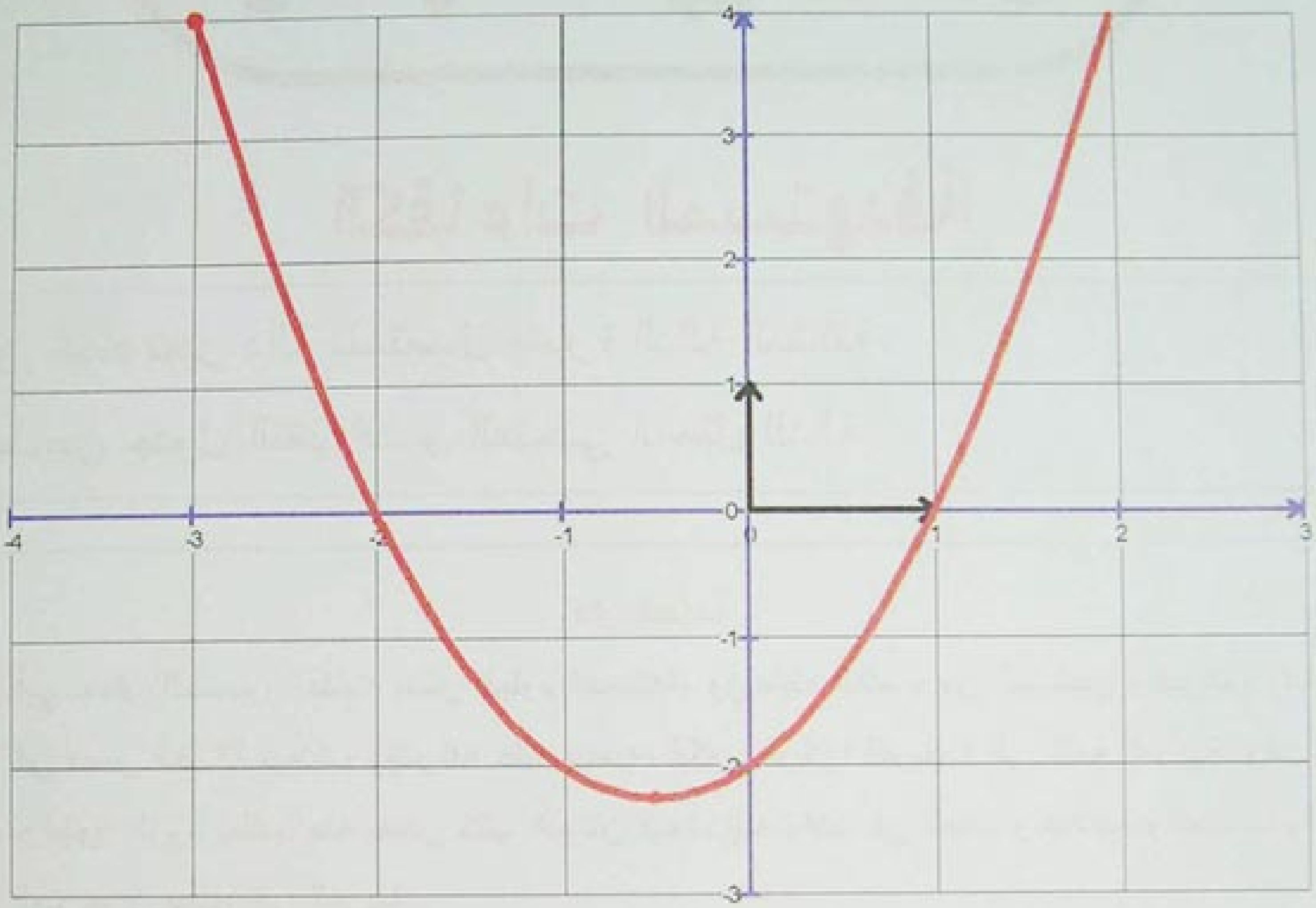
- **هارون بن محمد بن عبد الله** بن محمد بن علي ابن عبد الله بن العباس و يلقب **بهارون الرشيد** (حوالي 763م – 24 مارس 809م) **هو الخليفة العباسي الخامس، وهو أشهر الخلفاء العباسيين. حكم بين 786 و 809 م.**
- عبد الله **المأمون** بن هارون الرشيد. **ولد عام 170 هـ في الليلة التي مات فيها الهادي واستخلف أبوه وتوفي عام 218 هـ.**

فترة الخلافة بالهجري: 198 –218. فترة الخلافة بالميلادي: 813 –833.

النشاط الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3;2]$ بـ $f(x)=x^2+x-2$

ليكن (C_f) المرسوم أدناه تمثيلها البياني في معلم.



- **باستعمال التمثيل البياني للدالة f أجب عن الأسئلة التالية:**

1. عين صور الأعداد الحقيقية -3، -1 و 0.
2. حل المعادلة $f(x)=-2$.
3. حل المتراجحة $f(x)>-2$.
4. حل المعادلة $x^2+x-2=0$.
5. حل المتراجحة $x^2+x-2\leq 0$.
6. حدد في جدول، حسب قيم x، إشارة $f(x)$.

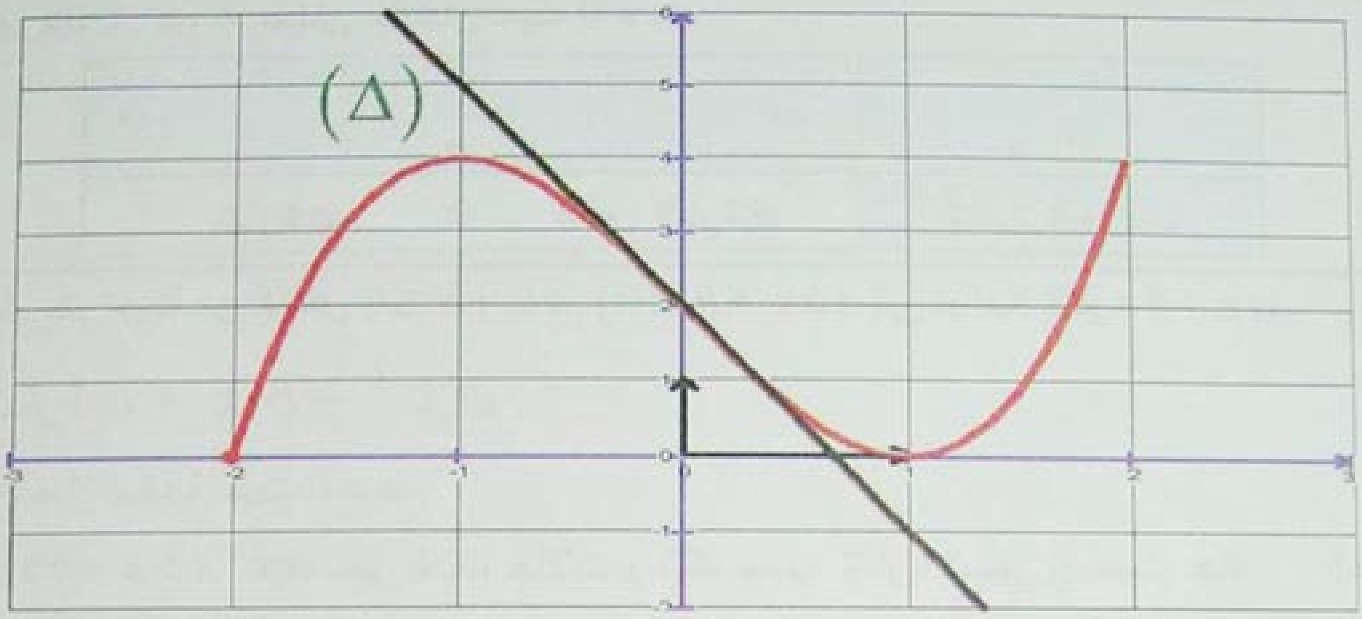
- **باستعمال عبارة الدالة f أجب عن الأسئلة التالية:**

1. أحسب صور الأعداد الحقيقية -3، -1 و 0.
2. حل المعادلة $f(x)=-2$.
3. بين أنه من أجل كل x من $[-3;2]$، $f(x)=(x-1)(x+2)$.
4. حل المعادلة $x^2+x-2=0$.
5. بالاعتماد على إشارة كل من $x-1$ و $x+2$ حدد في جدول، حسب قيم x، إشارة $f(x)$.
6. استنتج حلول المتراجحة $x^2+x-2>0$.

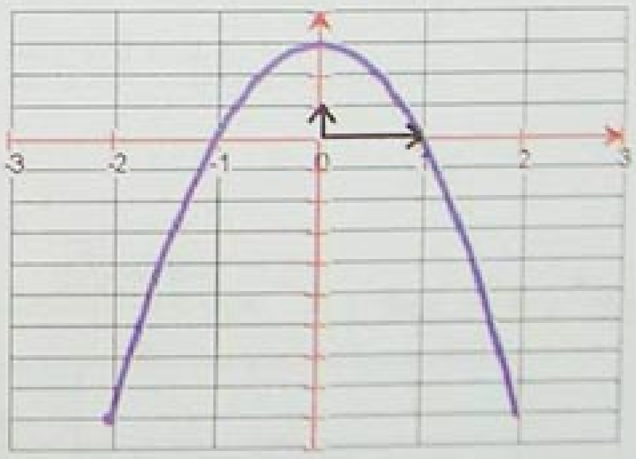
النشاط الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ تمثيلها البياني (C_f) الممثل أدناه في معلم.

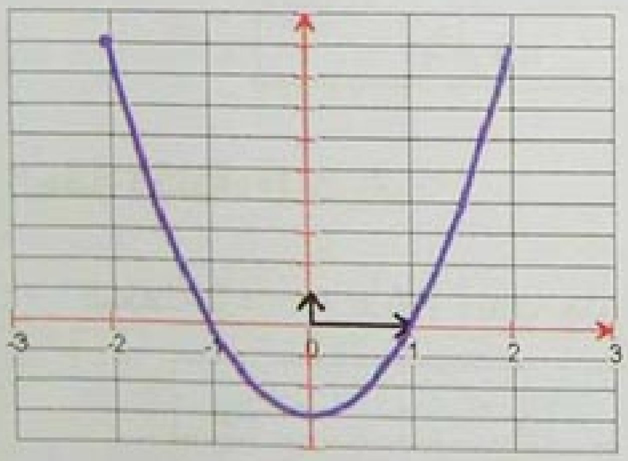
ليكن (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.



1. حدد حسب قيم x اتجاه تغير الدالة.
2. عين $f(-2)$، $f(2)$، $f(-1)$ و $f(1)$.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f.
4. عين معادلة للمماس (Δ).
5. خمن معادلة مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها -1 و عند النقطة التي فاصلتها 1. حدد ميل كل من المماسين.
6. عين، من بين التمثيلات البيانية التالية، التمثيل البياني للدالة f' الدالة المشتقة للدالة f مع التبرير:

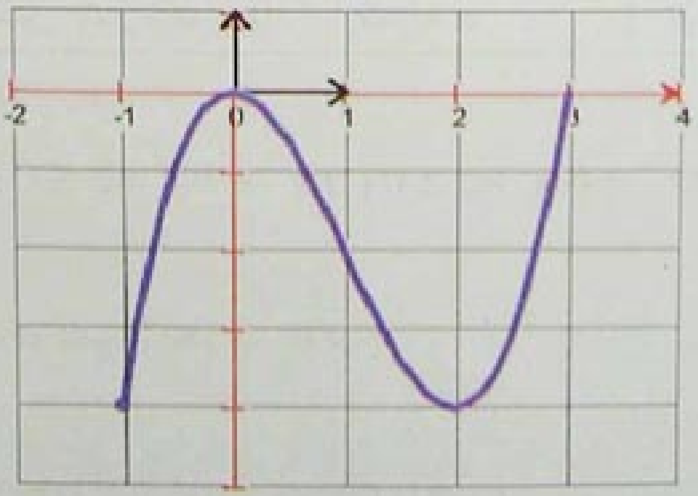


(1)



(3)

(2)



تذكير حول المعادلات و المتراجحات

1. إشارة $ax+b$

مبرهنة: a، b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$.

x	$-\infty$ $-\frac{b}{a}$ $+\infty$
إشارة $ax+b$	عكس إشارة a 0 إشارة a

ملاحظة: يؤول حل متراجحة من الشكل $ax+b \leq 0$ $(ax+b \geq 0)$ إلى دراسة إشارة $ax+b$.

2. إشارة ax^2+bx+c

a، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نميز ثلاث حالات و ذلك حسب إشارة المميز Δ حيث $\Delta = b^2-4ac$.

الحالة الأولى: $\Delta < 0$

ليس للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذورا و لدينا:

x	$-\infty$ $+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a

الحالة الثانية: $\Delta = 0$

للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذرا مضاعفا $x' = -\frac{b}{2a}$ و لدينا:

x	$-\infty$ x' $+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a 0 إشارة a

الحالة الثالثة: $\Delta > 0$

للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذران متمايزان $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و لدينا بفرض $x' < x''$:

x	$-\infty$ x' x'' $+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a 0 عكس إشارة a 0 إشارة a

ملاحظة:

1. يؤول حل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c \leq 0$ $(ax^2+bx+c \geq 0)$ إلى دراسة إشارة ax^2+bx+c.
2. لدراسة إشارة ax^2+bx+c نتبع الخطوات التالية:
   - نحسب المميز Δ.
   - نعين الجذور إن وجدت $(\Delta \geq 0)$ ثم نستنتج الإشارة.

تمرين محلول1: أدرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

$g(x)=-3x+2$ ، $f(x)=2x+4$

طريقة: لدراسة إشارة $ax+b$ $(a\neq 0)$ نقوم أولا بحل المعادلة $ax+b=0$ ثم نستنتج بعد تحديد إشارة a.

حل:

1. $2x+4=0$ يعني $2x=-4$ أي $x=-2$. $2x+4$ هو من الشكل $ax+b$ مع $a=2$ و بما أن $a>0$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
إشارة $2x+4$		$-$	0	$+$	

2. $-3x+2=0$ يعني $-3x=-2$ أي $x=\frac{2}{3}$. $-3x+2$ هو من الشكل $ax+b$ مع $a=-3$ و بما أن $a<0$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
إشارة $-3x+2$		$+$	0	$-$	

تمرين محلول2: أدرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ حيث:

$h(x)=2x^2-10x+12$ ، $g(x)=-x^2-x+2$ ، $f(x)=x^2+x+1$

حل:

1. لدينا $\Delta=-3$ ومنه ليس للمعادلة $x^2+x+1=0$ حلولا. x^2+x+1 هو من الشكل ax^2+bx+c مع $a=1$ و بما أن $\Delta<0$ و $a>0$ فإن:

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة x^2-x+4		$+$	

2. لدينا $\Delta=9$ ومنه للمعادلة $-x^2-x+2=0$ جذران هما: $x'=\frac{1+3}{-2}=-2$ و $x''=\frac{1-3}{-2}=1$.
$-x^2-x+2$ هو من الشكل ax^2+bx+c مع $a=-1$ و بما أن $\Delta>0$ و $a<0$ فإن:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
إشارة $-x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. لدينا $\Delta=4$ ومنه للمعادلة $2x^2-10x+12=0$ جذران هما: $x'=\frac{10-2}{4}=2$ و $x''=\frac{10+2}{4}=3$.
$2x^2-10x+12$ هو من الشكل ax^2+bx+c مع $a=2$ و بما أن $\Delta>0$ و $a>0$ فإن:

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
إشارة $2x^2-10x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدرس

تذكير حول المشتقات

1. الدوال المشتقة لدوال مألوفة

a، b و k أعداد حقيقية. f دالة و f' دالتها المشتقة.

$f(x)$	k	$ax+b$	x^2	x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	0	a	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$
مجالات قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

أمثلة:

- الدالة $x \mapsto 2x-3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto 2$.
- الدالة $x \mapsto x^3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto 3x^2$.

2. العمليات على الدوال المشتقة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. k عدد حقيقي.

الدالة	$f+g$	kf	fg	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
قابلة للاشتقاق على	I	I	I	I باستثناء قيم x حيث $g(x)=0$	
دالتها المشتقة هي	$f'+g'$	kf'	$f'g+g'f$	$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$

3. معادلة المماس

نتيجة: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

إذا قبلت f الاشتقاق عند a من I فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a\,;f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

4. إتجاه تغير دالة باستعمال إشارة الدالة المشتقة

مبرهنة: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

ملاحظات:

- تبقى المبرهنة صحيحة في الحالتين الأولى و الثانية إذا انعدمت $f'(x)$ من أجل عدد منته من قيم x.
- دراسة اتجاه تغير دالة يعني تعيين المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة تماما، متناقصة تماما أو ثابتة.

تمرين محلول1: عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=-3x+1$ (1) • $f(x)=x^2-4x+5$ (2) • $f(x)=2x^3-x^2+5x+3$ (3).

حل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-3$.
2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=2x-4$.
3. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=6x^2-2x+5$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

1. عين الدالة المشتقة للدالة f.
2. أكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.

حل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$،

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x+3)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}.$$

2. معادلة (Δ) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=f'(0)\times x+f(0)$

بما أن $f(0)=\dfrac{2(0)+3}{0+1}=3$ و $f'(0)=\dfrac{-1}{(0+1)^2}=-1$ فإن $(\Delta): y=-x+3$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3;2]$ بـ $f(x)=x^2+x$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f.
2. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها -2. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C_f) و المماس (Δ).

حل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-3;2]$ و لدينا من أجل كل x من $[-3;2]$، $f'(x)=2x+1$.

$2x+1=0$ يعني $2x=-1$ أي $x=-\dfrac{1}{2}$ و منه إشارة $f'(x)$ هي كالتالي:

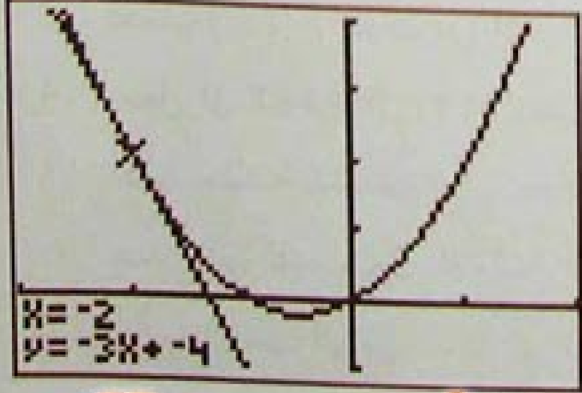
x	-3		$-\frac{1}{2}$		2
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج من إشارة $f'(x)$ أن الدالة f متناقصة تماما على $\left[-3;-\dfrac{1}{2}\right]$

و متزايدة تماما على المجال $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$.

2. معادلة (Δ) هي: $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

لدينا $f(-2)=2$ و $f'(-2)=-3$. نجد بعد التعويض: $y=-3x+4$.



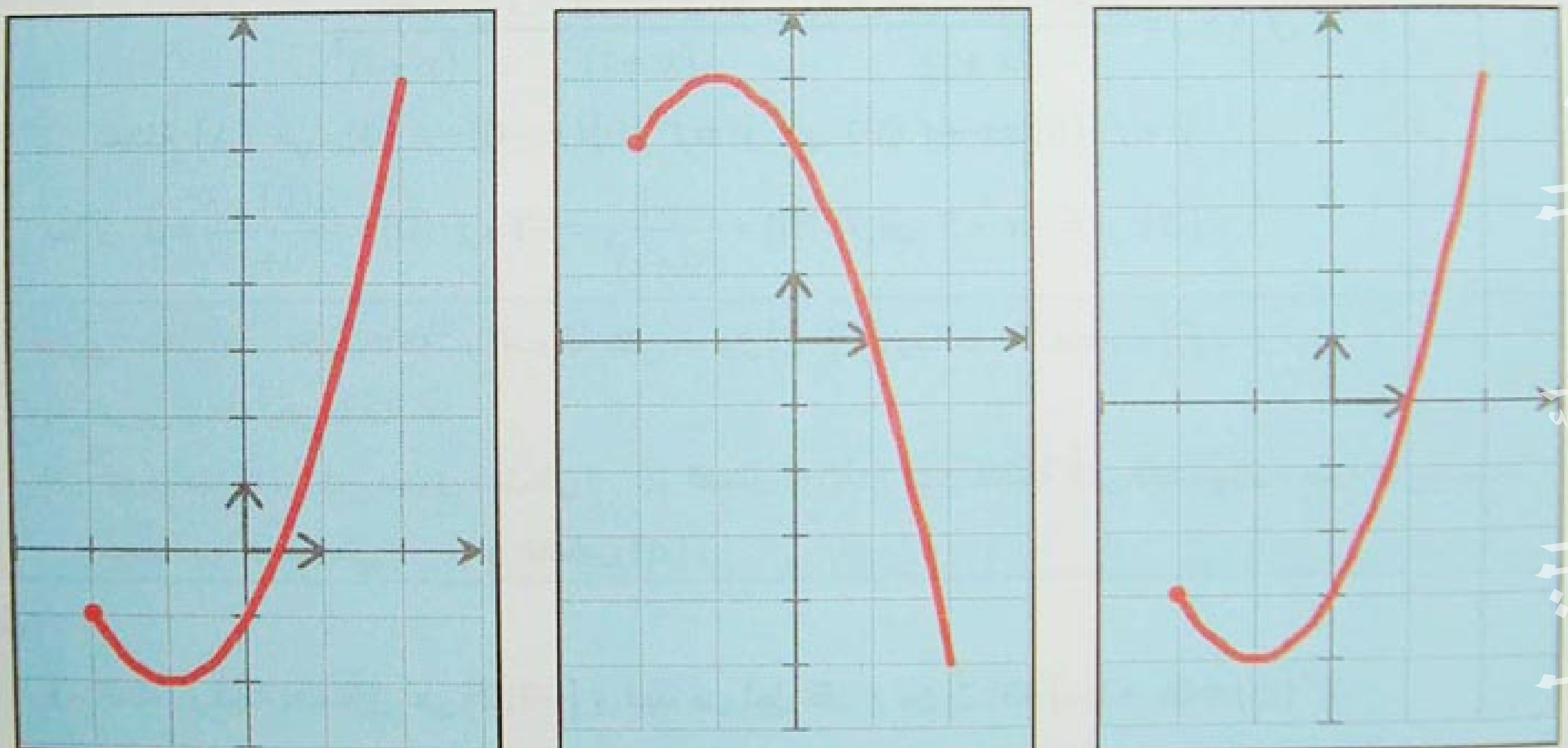
الأعمال الموجهة

من جدول التغيرات إلى التمثيل البياني

نعتبر فيما يلي جدول تغيرات دالة f معرفة على المجال $[-2;2]$:

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	-4	↗	5

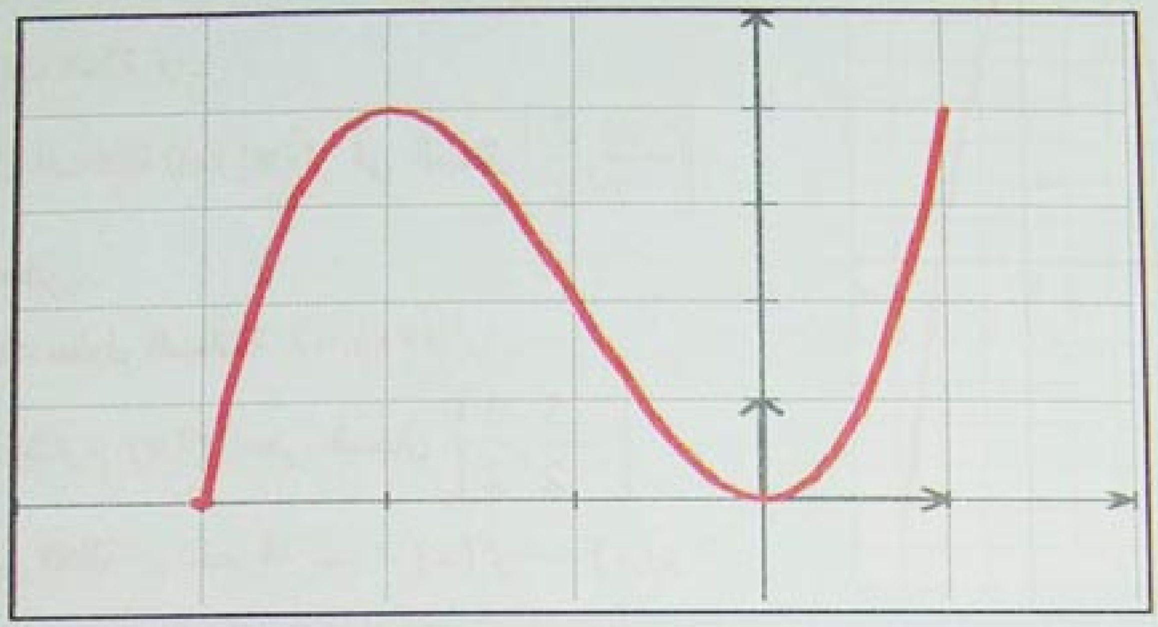
1. من بين التمثيلات البيانية المرسومة أدناه عين المنحني (C_f) الممثل للدالة f.



2. نعلم أنه من أجل كل x من $[-2;2]$، $f(x)=x^2+bx-3$.
   - استنتج من جدول التغيرات معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول b.
   - أحسب العدد b ثم استنتج عبارة $f(x)$.
3. أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على المجال $[-2;2]$. قارن نتائجك مع تلك الواردة في جدول التغيرات.
4. تحقق أن النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المنحني (C_f).
5. أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة A.
6. حدد بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ في المجال $[-2;2]$ ثم عينها جبريا.
7. أنشئ التمثيل البياني للدالة g المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $g(x)=-f(x)$

من التمثيل البياني إلى جدول التغيرات

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3;1]$ بتمثيلها البياني (C_f) المرسوم في الشكل أدناه.



1. من بين جداول التغيرات المقترحة عين جدول تغيرات الدالة f.

x	-3		-2		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	4	↘	0

x	-3		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	4

x	-3		-2		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	4

2. نعلم أن عبارة الدالة f هي كالتالي: $f(x)=x^3+bx^2+c$ حيث b و c عددان حقيقيان.

بقراءة بيانية عين كلا من $f(0)$ و $f(1)$ ثم استنتج أنه من أجل كل x من $[-3;1]$، $f(x)=x^3+3x^2$.

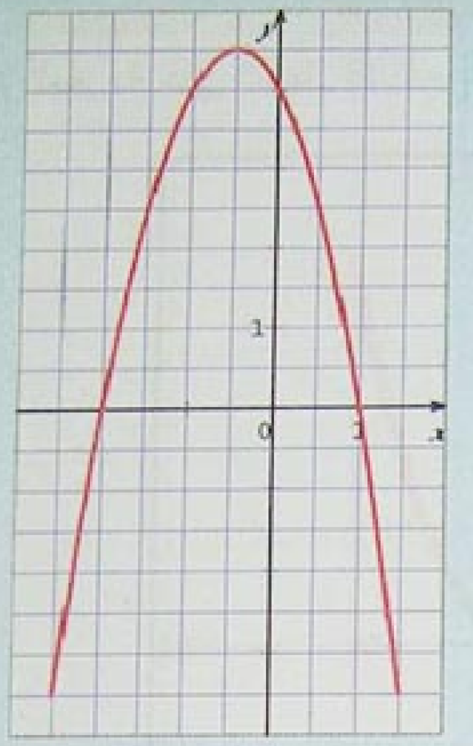
3. لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f.
   - أحسب $f'(x)$ ثم أدرس على المجال $[-3;1]$ إشارة $f'(x)$.
   - حدد اتجاه تغير الدالة f. قارن مع جداول التغيرات أعلاه.
4. عين معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.
5. أعد رسم المنحني (C_f) ثم أرسم المماس (Δ).

استعد للباكالوريا

موضوع محلول

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$(\mathscr{C})$ هو التمثيل البياني لدالة f على المجال $\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$



1. شكل جدول تغيرات الدالة f.
2. ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في المجال $\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$
3. k عدد حقيقي معطى.
   عين حسب قيم k عدد حلول المعادلة $f(x)=k$
4. عين حسب قيم x إشارة $f(x)$ على المجال $\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$
5. رسم التمثيل البياني للدالة g المعرفة بـ : $g(x)=-f(x)$

حل مختصر

1. الدالة f متزايدة تماما على $\left[-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

x	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f(x)$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$

2. لمعادلة $f(x)=0$ في المجال $\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$ تقبل حلين هما -2 و 1 .
3. حلول المعادلة $f(x)=k$ هي فواصل نقط تقاطع المنحني مع المستقيم الذي معادلته $y=k$

قيم k	عدد الحلول
$k<-\frac{7}{2}$	لا توجد حلول
$-\frac{7}{2}\leq k<\frac{9}{2}$	حلين
$k=\frac{9}{2}$	حل مضاعف
$k>\frac{9}{2}$	لا توجد حلول

4. $f(x)\geq 0$ على المجال $[-2;1]$
   و $f(x)\leq 0$ على كل من المجالين $\left[-\frac{5}{2};-2\right]$ و $\left[1;\frac{1}{2}\right]$
5. نحصل على التمثيل البياني للدالة g بالتناظر بالنسبة لمحور الفواصل

تعاليق

- لاحظ أن المنحني $(\mathscr{C})$ يصعد من الأسفل على الأعلى في المجال $\left[-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right]$ و يهبط من الأعلى إلى الأسفل في المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$
- المستقيم الذي معادلته $y=k$ موازي لحامل محور الفواصل.
- يتم تعيين إشارة $f(x)$ بيانيا بتعيين أجزاء المنحني $(\mathscr{C})$ التي تقع فوق محور الفواصل و التي تقع تحت محور الفواصل

موضوع مع إرشادات

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^3-3x+2$

$(\mathcal{C})$ هو المنحني البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

2. أ- من أجل كل عدد حقيقي x ، احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة.

ب- عين إشارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

جـ- استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

د- شكل جدول تغيرا ت الدالة f على $\mathbb{R}$.(لا يطلب حساب النهايات).

3. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

ب-استنتج أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقطع محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

4. انقل الجدول التالي ثم أتممه :

x	$-2,5$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

5. ارسم تمثيلا بيانيا للمنحني على المجال $[-2,5;2]$

6. بقراءة بيانية :

أ- عين عدد حلول المعادلة $f(x)=2$.(أعط حصرا للحلول في حالة وجودها)

ب -حل المتراجحة $f(x)<0$.

إرشادات

1. استعمل النشر منطلقا من العبارة الثانية لــ $f(x)$.

2. أ- طبق مشتق مجموع دوال أو مشتق الجداء إذا استعملت عبارة $f(x)$ المعطاة في السؤال 1.

ب- لدراسة إشارة $f'(x)$ ينبغي معرفة إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.

3. أ- لاحظ أن الدالة f على شكل جداء (السؤال 1).

ب- حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع المنحني $(\mathcal{C})$ مع محور الفواصل.

6. أ- لاحظ نقط تقاطع المنحني $(\mathcal{C})$ مع المستقيم الذي معادلته $y=2$.

ب- تكون $f(x)<0$ إذا كان المنحني $(\mathcal{C})$ تحت محور الفواصل

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - تذكير حول المعادلات و المتراجحات

1 ادرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

$f(x)=3x-5$ ، $g(x)=-3x+5$

2 أدرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

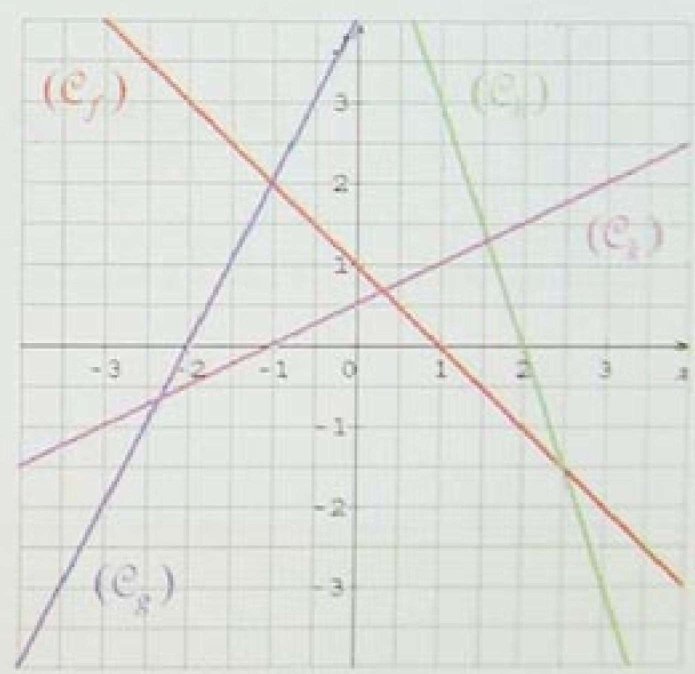
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ، $g(x)=-\frac{2}{3}x-1$

3 ادرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

$f(x)=\sqrt{8}-\sqrt{2}x$ ، $g(x)=-0,01x-0,5$

4 إليك أربع تمثيلات بيانية $(\mathcal{C}_f)$، $(\mathcal{C}_g)$، $(\mathcal{C}_h)$ و $(\mathcal{C}_k)$ لأربعة دوال تآلفية f، g، h و k على الترتيب.

عين إشارة هذه الدوال



5 إليك جدول تغيرات الدالتين f و g

x	-1	3	5
$f(x)$		0	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	

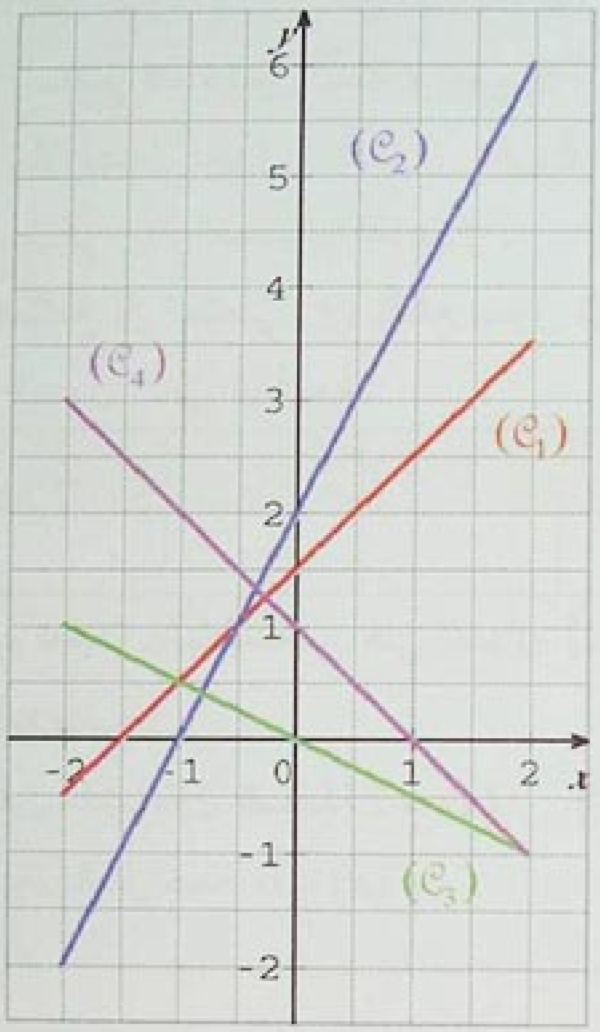
تعرف على إشارة كل من f و g

6 f، g، h و k دوال معرفة على $[-2;2]$ بـ:

$f(x)=1-x$ ، $g(x)=2+2x$ ،

$h(x)=x+\frac{3}{2}$ ، $k(x)=-\frac{1}{2}x$

و $(\mathcal{C}_1)$، $(\mathcal{C}_2)$، $(\mathcal{C}_3)$ و $(\mathcal{C}_4)$ تمثيلات بيانية



علما أن كل منحني من هذه المنحنيات هو لدالة من الدوال f، g، h و k ، أرفق كل منحن بدالته .

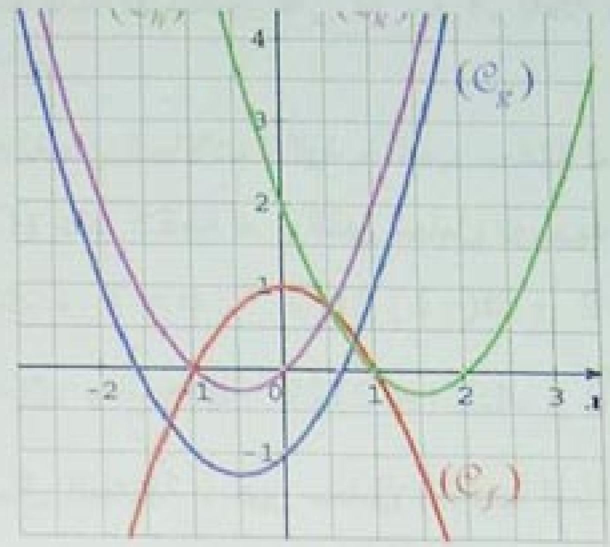
7 ادرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ ، $g(x)$، $h(x)$، $k(x)$ و $m(x)$ حيث:

$f(x)=2x^2+x-3$ ، $g(x)=-x^2+7x-12$ ،

$h(x)=2x^2-x+5$ ، $k(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x-20$

$m(x)=(2x-10)(5-7x)$

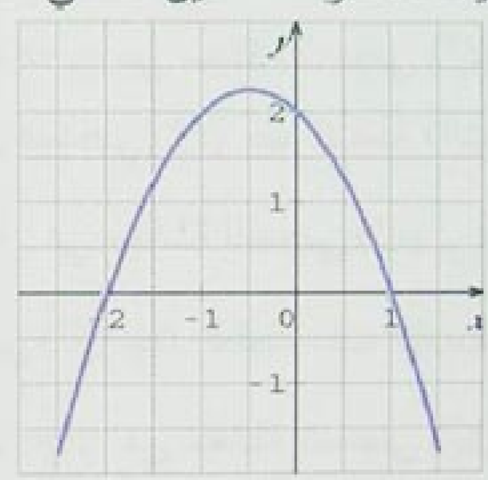
8 إليك أربع تمثيلات بيانية $(\mathcal{C}_f)$، $(\mathcal{C}_g)$، $(\mathcal{C}_h)$ و $(\mathcal{C}_k)$ لأربعة دوال كثيرات حدود من الدرجة الثانية f، g و k على الترتيب.بقراءة بيانية عين إشارة هذه الدوال على $\mathbb{R}$.



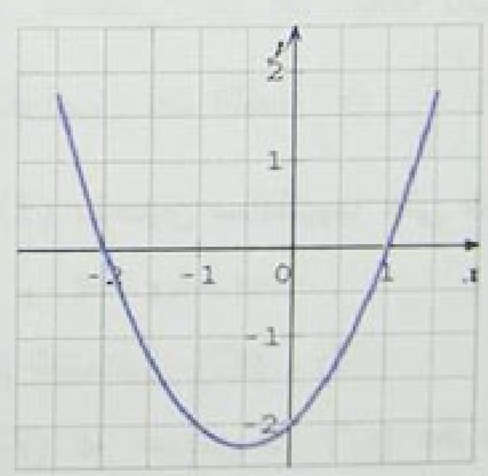
9 f دالة معرفة على $[-2,5;2,5]$ حيث جدول تغيراتها هو التالي:

x	$-2,5$		$-0,5$		$2,5$
$f(x)$		↗	$\frac{9}{4}$	↘	

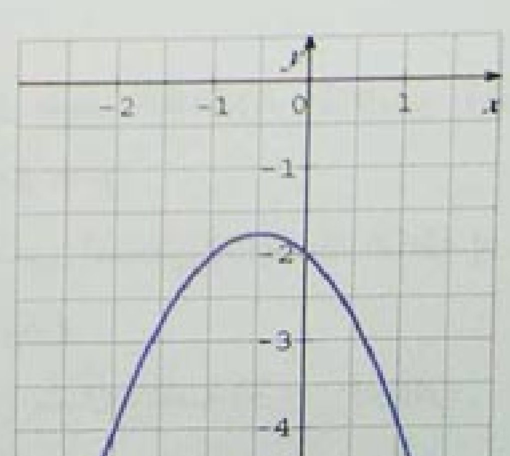
من بين المنحنيات المقترحة ، عين منحني الدالة f



(1)

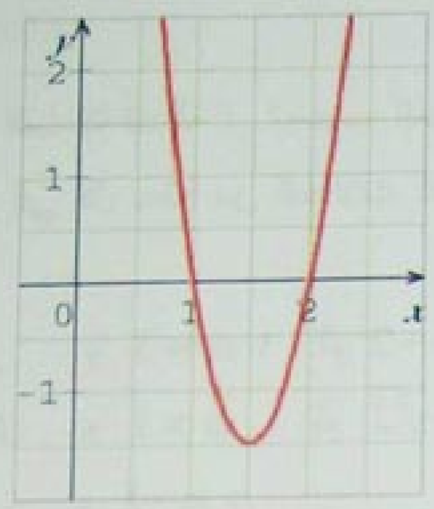


(2)



(3)

10 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس هو التالي:



من بين جداول التغيرات المقترحة عين جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$-\frac{3}{2}$	↘	

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$\frac{3}{2}$	↗	

2 - تذكير حول المشتقات

11 عين الدالة المشتقة للدالة f في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=5-2x$

2) $f(x)=-2x^2+3x-10$

3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+1$

12 عين الدالة المشتقة للدالة f في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$

تمارين

2) $f(x)=\frac{-x+1}{x}$

3) $f(x)=\frac{4x+5}{4x-5}$

13 استعمل الدالة المشتقة للدالة f لحساب العدد المشتق $f'(a)$ في كل حالة من الحالات المقترحة التالية :

1) $f(x)=2x-7$ و $a=3$ ؛ ثم $a=-2$

2) $f(x)=-3x-1$ و $a=1$ ؛ ثم $a=-\sqrt{2}$

3) $f(x)=x^2-3$ و $a=-1$.

4) $f(x)=x^3+1$ و $a=0$.

5) $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$ و $a=2$.

14 استعمل المشتقة للدالة f لحساب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة من الحالات المقترحة التالية :

1) $f(x)=\frac{2}{x}$ و $a=-2$.

2) $f(x)=\frac{-1}{2x}$ و $a=\frac{1}{2}$.

3) $f(x)=\frac{3}{x+1}$ و $a=-3$.

4) $f(x)=\frac{x+2}{x}$ و $a=-2$ ؛ ثم $a=3$

5) $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ و $a=2$ ؛ ثم $a=-3$

15 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2$

1) أحسب العدد المشتق للدالة f من أجل القيمة 3

2)عين معادلة المماس Δ لمنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها0.

16 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x^3$

2) أحسب العدد المشتق للدالة f من أجل القيمة 3

2)عين معادلة المماس Δ لمنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها0.

• في التمارين من **17** إلى **24** ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

17 f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و A نقطة من منحنيها (C) .

في كل حالة من الحالات الآتية ، أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة A والذي معامل توجيهه هو a

1) $A(2;0)$ و $a=1$ 2) $A(-1;3)$ و $a=-2$

3) $A(-2;3)$ و $a=\frac{3}{2}$ 4) $A(2;\sqrt{2})$ و $a=\sqrt{2}$

18 باستعمال المشتقة ، عين معامل التوجيه لمماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، ثم أكتب معادلة له ، في كل حالة من الحالات التالية:

1) معادلة (C) هي : $y=\frac{2x^2}{5}$ ، و $x_0=3$

2) معادلة (C) هي : $y=-x^2+4$ ، و $x_0=2$

3) معادلة (C) هي : $y=x^2-3x+2$ ، و $x_0=1$

4) معادلة (C) هي : $y=\frac{x-1}{3x}$ ، و $x_0=-2$

19 $y=x^2-2x$ هي معادلة للمنحني (C) . أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة -1.

20 $y=\frac{-4}{x}$ هي معادلة للمنحني (C) . أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

21 $y=2-\frac{1}{2}x^2$ هي معادلة للمنحني (C) .

برهن أن مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة1، يقطع محور الفواصل عند النقطة $B\left(\frac{5}{2};0\right)$.

22 (C) و (D) منحنيان معادلتيهما على الترتيب : $y=x^2$ و $y=-4x-4$.

1) أدرس تقاطع المنحنيين (C) و (D) .

2) استنتج أن (D) هو المماس لـ (C) عند نقطة يطلب إحداثياها .

23 (C) منحن يشمل النقطة $A(2;4)$ و (Δ) مستقيم معادلته $y=3x+5$.

أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي يوازي المستقيم (Δ) .

24 (C) منحن يشمل النقطة $A(-1;-3)$.

تمارين

أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي شعاع توجيهه $\vec{i}$.

25 في كل حالة من الحالات أدناه ،أكتب بمعادلة لمماس المنحني (C_f) عند النقطة ω ذات الفاصلة x_0 .

1) $f : x \mapsto x^2 + 3x + 4$ و $x_0 = 0$.

2) $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 + 3x$ و $x_0 = -1$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{1-2x}$ و $x_0 = 1$

26 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

و $(\mathcal{P})$ منحنيها الممثل في المعلم $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1) برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب دالتها المشتقة

2) أكتب معادلة لمماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند نقطته $E(0\,;\,4)$.

3) هل توجد نقطة M من $(\mathcal{P})$ يكون مماسه عندها موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y = \dfrac{1}{2}x$.

4) a عدد حقيقي . أكتب معادلة لمماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند النقطة ذات الفاصلة a .

5) استنتج أن المنحني $(\mathcal{P})$ يقبل مماسين كل منهما يشمل مبدأ المعلم O .

27 باستعمال النظريات على المشتقات أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$.

2) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}x + 5$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + 12x + 1}{6}$.

28 باستعمال النظريات على المشتقات أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f : x \mapsto \dfrac{-2}{x}$ ؛ 2) $f : x \mapsto \dfrac{-x+1}{x+2}$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-3}$ ؛ 4) $f : x \mapsto \dfrac{2x+6}{1-x}$

29 $y = -x^2 + 3$ و $y = \dfrac{2}{x}$ معادلتا المنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب الممثلين في معلم متعامد ومتجانس.

1) بين أنه يوجد مستقيم (Δ) يمس المنحنيين في نقطة A يطلب تعيين إحداثييها.

2) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) .

3) أدرس وضعية كل من (C_1) و (C_2) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

30 باستعمال المشتقة ،ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^2 - x - 6$ 2) $f(x) = 1 - x^2$

3) $f(x) = (x-2)(x-4)$ 4) $f(x) = x^2 + 3x$

31 باستعمال المشتقة ،ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^3 + 1$ 2) $f(x) = 1 - x^3$

3) $f(x) = x^3 + 3x$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$

32 باستعمال المشتقة ،ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على المجال D في كل حالة من الحالات التالية:

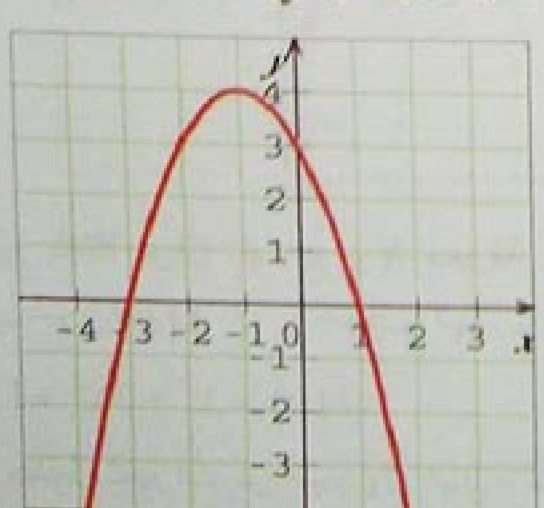
1) $f(x) = \dfrac{-3}{x}$ ؛ $D =]0;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ ؛ $D =]1;+\infty[$

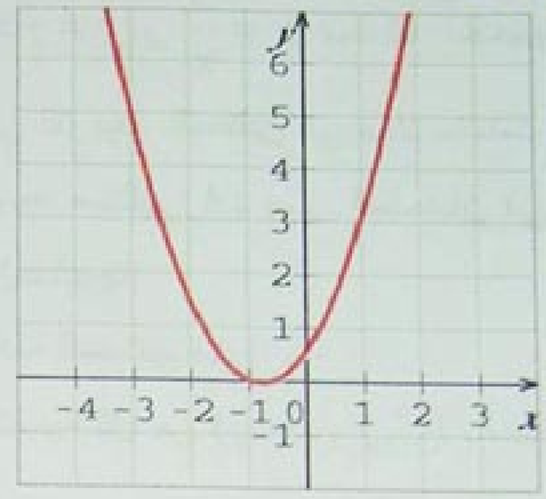
3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ ؛ $D =]-\infty;-1[$

4) $f(x) = \dfrac{-2x+3}{x+4}$ ؛ $D =]-\infty;-4[$

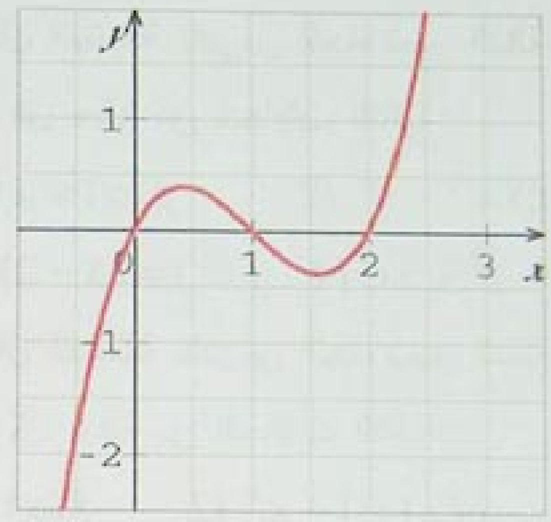
33 في كل حالة من الحالات التالية ، الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و معطاة بتمثيلها البياني .تعرف على اتجاه تغير الدالة f



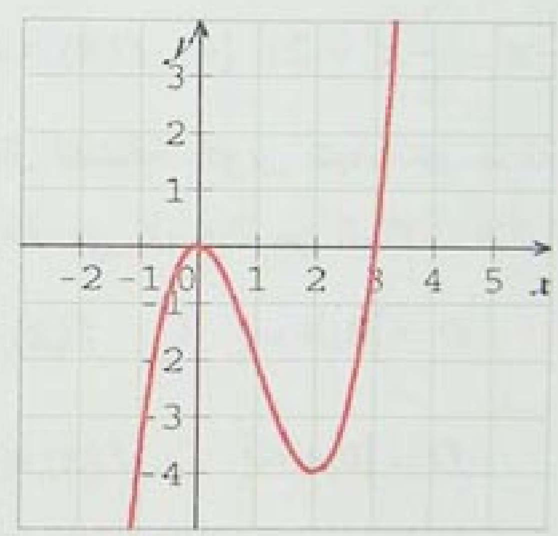
الحالة(1)



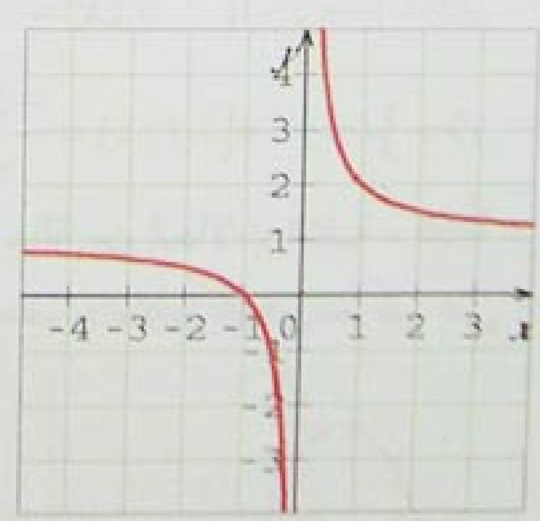
الحالة(2)



الحالة(3)



الحالة(4)



الحالة(5)

34 نعتبر ثلاثة دوال f ، g و h معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$f(x)=x^3-3x$ ، $g(x)=-x^3+3x^2$

و $h(x)=x^3+3x^2+1$.

ارفق كل جدول تغيرات من الجداول التالية للدوال f_1 ، f_2 ، f_3 بالدالة f ، g أو h .

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f_1(x)$		↗	5	↘	1	↗	

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f_2(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f_3(x)$		↘	0	↗	2	↘	

35 الجدول التالي و جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^3$

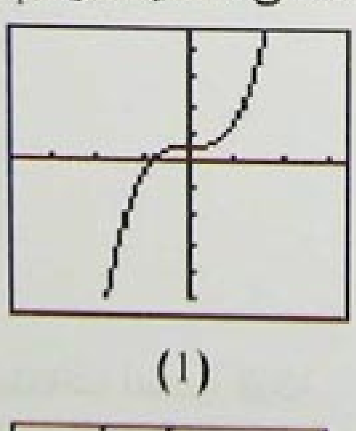
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

و f_1 ، f_2 ، f_3 و f_4 دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

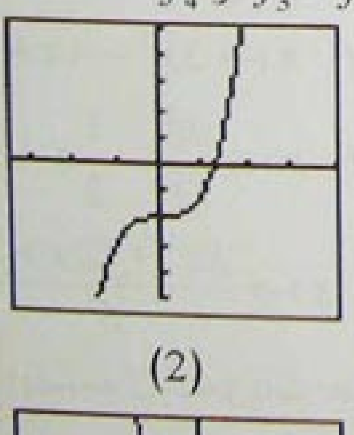
$f_1(x)=x^3-2$ ، $f_2(x)=-x^3$

$f_3(x)=x^3+\frac{1}{2}$ و $f_3(x)=1-x^3$

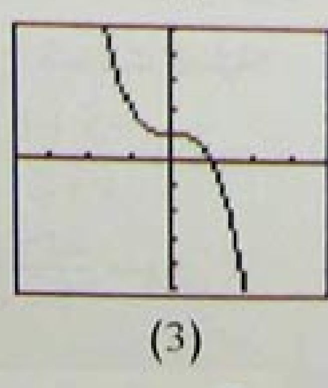
انطلاقا من جدول تغيرات f و من بين المنحنيات التالية ، تعرف على منحنيا الدوال f_1 ، f_2 ، f_3 و f_4



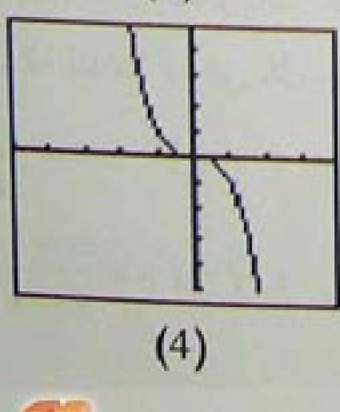
(1)



(2)



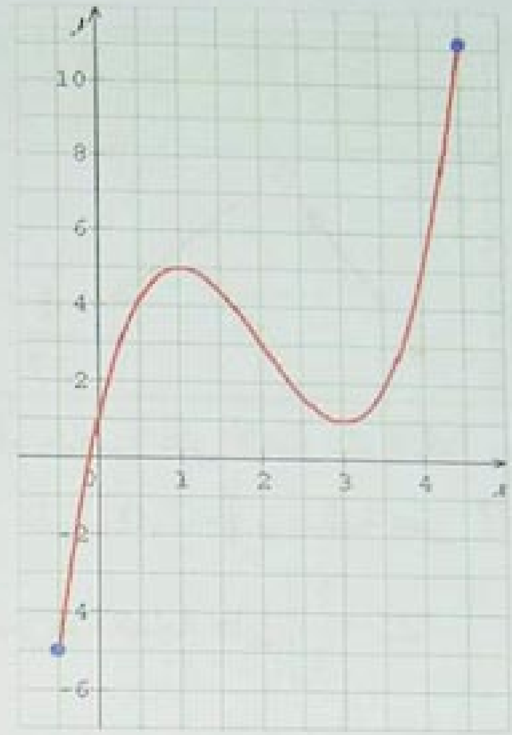
(3)



(4)

36 الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على $[-0,5;4,5]$ بـ:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$



1. احسب $f(-0,5)$. نقبل أن $f(4,5)=11,125$.
2. أعط جدول تغيرات f.
3. بقراءة بيانية عين $f(0)$ و $f(3)$.
4. حل بيانيا المعادلتين التاليتين:

أ) $f(x)=0$ ، ب) $f(x)=4$.

5. حل بيانيا في المجال $[-0,5;4,5]$ المتراجحة:

$$f(x)\leq 5$$

6. ليكن D التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x+1$.

أ) احسب $g(0)$ و $g(3)$.

ب) ارسم D في الشكل.

جـ) حل بيانيا في المجال $[-0,5;4,5]$:

المعادلة $x^3-6x^2+9x+1=x+1$

و المتراجحة $x^3-6x^2+9x+1\leq x+1$.

7. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

37 يعطى جدول تغيرات دالة f كما يلي:

x	-1	0	2	4
$f(x)$	0 ↗	2 ↘	-3 ↗	-2

باستعمال المعلومات المتوفرة في هذا الجدول:

1) عين $f(0)$.

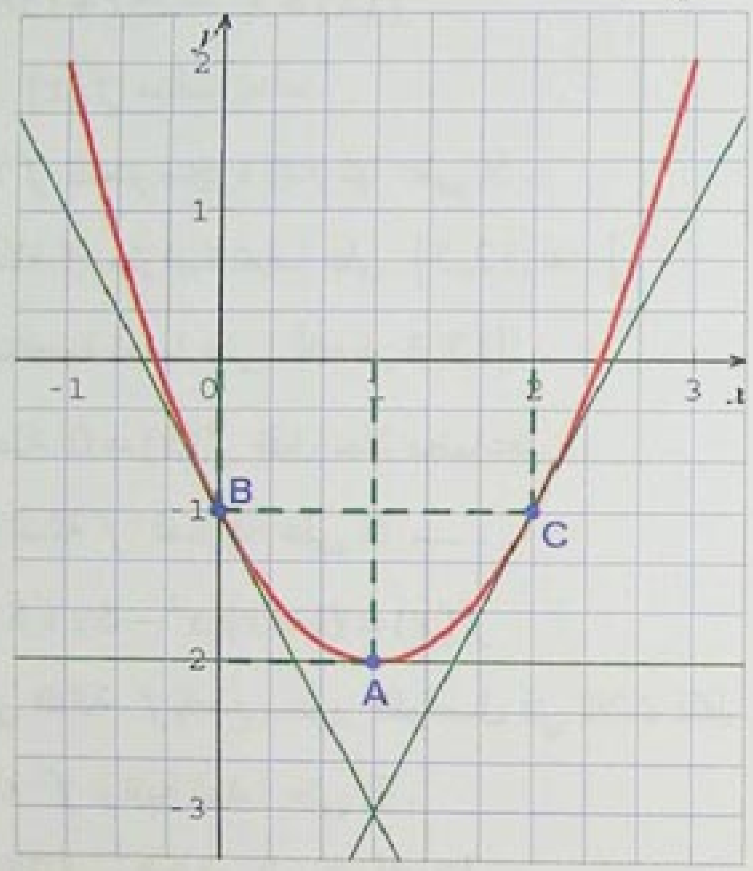
2) هل النقطتان $A(0;-1)$ و $B(2;-3)$ تنتميان إلى منحني الدالة f ؟

3) اذكر تغيرات الدالة f.

4) قارن بين $f(1,5)$ و $f(1,8)$ ثم بين $f(-0,5)$ و $f(-0,8)$.

5) ارسم تمثيلا بيانيا ممكنا للدالة f.

38 الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة على $[-1;3]$ ، ومثلنا المماسات للمنحني (C) عند النقط التي فواصلها 0 ، 1 و 2.



1. بقراءة بيانية ،عين $f(0)$ ، $f(1)$ و $f(2)$.
2. بقراءة بيانية ،عين $f'(0)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$.
3. عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة B.
4. علما أن الدالة f معرفة بالشكل $f(x)=x^2+bx+c$ حيث b و c عددان حقيقيان

باستعمال النتائج السابقة عين b و c.

تحقق إذن أن $f\left(1+\sqrt{2}\right)=0$

نقبل أن $f\left(1-\sqrt{2}\right)=0$. باستعمال هذه النتائج وباستعمال التمثيل البياني (C) ، شكل جدول إشارة f على $[-1;3]$.

5. الدالة f هي مشتقة دالة F على المجال $[-1;3]$.

شكل جدول تغيرات الدالة F على المجال $[-1;3]$

اختيار من متعدد

39 كل سؤال يتضمن إجابة واحدة صحيحة ، تعرف عليها:

1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=-0,1x+0,6$$

أ- f موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

ب- f سالبة تماما على $\mathbb{R}$.

جـ- f موجبة في $]-\infty;6]$ و سالبة في $[6;+\infty[$.

د- f موجبة في $]6;+\infty[$ و سالبة في $]-\infty;6[$.

2. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=x^2-25x+156$$

أ- مميز $f(x)$ سالب تماما.

ب- $f'(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها على $\mathbb{R}$.

جـ- الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;12,5]$

و متناقصة تماما على $[12,5;+\infty[$.

د- المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا مضاعفا.

3. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=(1-x)(x^2-6x+8)$$

أ- منحني الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط.

ب- الدالة f رتيبة تماما على $\mathbb{R}$.

جـ- الدالة f سالبة في المجال $]2;4[$.

د- المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

4. لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـــ :

$$f(x)=\frac{1}{0,05x-1}$$

أ- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-20\}$.

ب- الدالة f متناقصة تماما على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها.

جـ- المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

د- $f'(x)=\dfrac{0,05}{(0,05x-1)^2}$

صحيح أم خاطئ

40 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على المجال $[-2;1]$.

x	-2		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1
$f(x)$	2	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	0	↗	4

أجب بصحيح أم خاطئ على العبارات التالية مع التبرير

1) f موجبة على $[-2;0]$ و سالبة على $[0;1]$

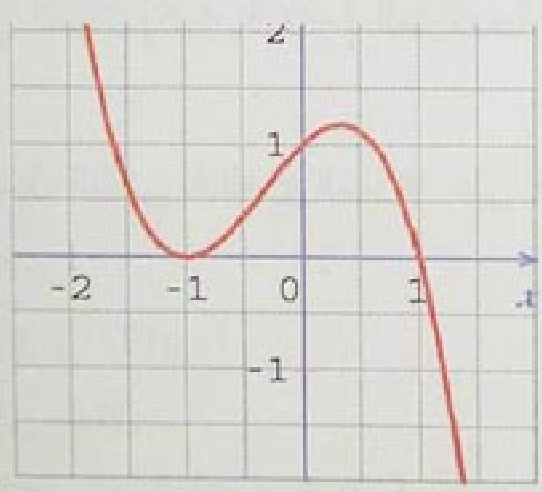
2) الدالة f متزايدة تماما على $\left[-2;-\frac{1}{3}\right]$

3) $-\frac{4}{27}$ قيمة حدية صغرى على المجال $[-1;1]$

4) منحني الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة.

5) المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا واحدا ينتمي إلى $[-2;1]$

41 الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة كثير حدود من الدرجة الثالثة f معرفة على $\mathbb{R}$.



أجب بصحيح أم خاطئ على العبارات التالية دون تبرير.

1) الدالة f' تنعدم مرتين مغيرة إشارتها.

2) المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول حقيقية.

3) f موجبة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و سالبة تماما على $]1;+\infty[$.

4) 0 قيمة حدية صغرى على المجال $]-\infty;0[$.

5. منحني الدالة f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=\frac{5}{6}$ في ثلاث نقط.

4 الدوال كثيرات الحدود 4

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لدالة لحل معادلات.
- استعمال التمثيل البياني لدالة لحل متراجحات.
- مناقشة معادلة بيانيا.
- تعيين نقطة الانعطاف.

بن يحيى السموءل المغربي

ولد السموءل بالمغرب و قد نشأ في بيئة علمية ، فقد كان عمه طبيبا و كان والده من علماء الرياضيات ومن ثم فقد شجعه على دراستها. درس كتاب " الأصول "لإقليدس وكتاب " البديع في الجبر " للكرخي و كتب أخرى و عمل على إتمامها و تحسينها.

طور السموءل الطريقة التحليلية في علم الجبر ، استطاع أن يؤلف كتابا في الرياضيات أطلق عليه " الباهر في الجبر" وهو في التاسعة عشرة من عمره ، ويتكون هذا الكتاب من أربعة أجزاء ، يعرض الجزء الأول منه العمليات الرياضية التي تجري على كثيرات الحدود لمجهول واحد ، بينما يتناول الجزء الثاني منه معادلات الدرجة الثانية ، أما الجزء الثالث من الكتاب فقد خصصه المغربي لشرح الكميات غير القياسية، وانفرد الجزء الرابع بتطبيق الأسس الجبرية على عدد من المسائل الرياضية .

وغير الرياضيات فقد كان المغربي أيضا من مشاهير أطباء الأمة الإسلامية في القرن الثاني عشر الميلادي ، وقد مارس الطب والصيدلة معا.

ومن أشهر كتبه : كتاب " إعجاز المهندسين " وكتاب " الموجز في الحساب " وكتاب " في المياه " وكتاب " المفيد الأوسط في الطب " وقد قدم الكسور العشرية في كتابه " القوامي في الحساب الهندي " .

توفي السموءل المغربي حوالي عام 1174 م .

الأنشطة

النشاط الأول

	A	B	C
1	x	f(x)	g(x)
2	10	28	30
3	100	298	300
4	1000	2998	3000
5	10000	29998	30000
6	100000	299998	300000
7	1000000	2999998	3000000
8	10000000	29999998	30000000
9	100000000	299999998	300000000
10	1000000000	2999999998	3000000000
11	1E+10	3E+10	3E+10
12			
13			
14			

	A	B	C
1	x	f(x)	g(x)
2	-10	-32	-30
3	-100	-302	-300
4	-1000	-3002	-3000
5	-10000	-30002	-30000
6	-100000	-300002	-300000
7	-1000000	-3000002	-3000000
8	-10000000	-30000002	-30000000
9	-100000000	-300000002	-300000000
10	-1000000000	-3000000002	-3000000000
11	-1E+10	-3E+10	-3E+10
12			
13			
14			

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x-2$ و $g(x)=3x$

ليكن (Δ) التمثيل البياني للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أرسم المنحنى (Δ).
2. باستعمال مجدول أنجز ورقتي الحساب المقابلة.

* نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيما كبيرة بالقدر الكافي. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ و نكتب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

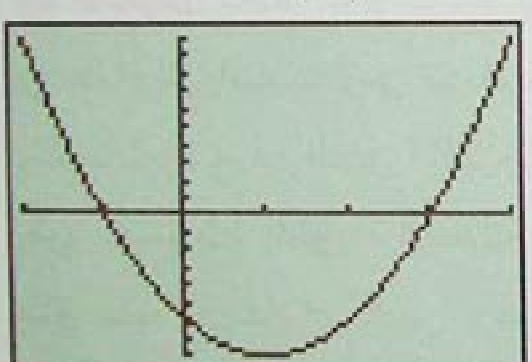
* نلاحظ أن $[-f(x)]$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ $(-x)$ قيما كبيرة بالقدر الكافي. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما يؤول x إلى $-\infty$ و نكتب:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

3. قارن بين قيم $f(x)$ و قيم $g(x)$ لما يأخذ x (على الترتيب $-x$) قيما كبيرة بالقدر الكافي.
4. خمن علاقة بين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ من جهة و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ من جهة ثانية.

النشاط الثاني

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x^2-4x-6$ و $g(x)=2x^2$



ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنى (C_f).
2. عين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.
3. باستعمال مجدول أنجز ورقتي الحساب الموالية:

	A	B	C
1	x	f(x)	g(x)
2	10	154	200
3	100	19594	20000
4	1000	1995994	2000000
5	10000	199959994	200000000
6	100000	2E+10	2E+10
7	1000000	2E+12	2E+12
8	10000000	2E+14	2E+14
9	100000000	2E+16	2E+16
10	1000000000	2E+18	2E+18
11	1E+10	2E+20	2E+20
12			
13			
14			

	A	B	C
1	x	f(x)	g(x)
2	-10	234	200
3	-100	20394	20000
4	-1000	2003994	2000000
5	-10000	200039994	200000000
6	-100000	2E+10	2E+10
7	-1000000	2E+12	2E+12
8	-10000000	2E+14	2E+14
9	-100000000	2E+16	2E+16
10	-1000000000	2E+18	2E+18
11	-1E+10	2E+20	2E+20
12			
13			
14			

4. كما في النشاط الأول ماذا تلاحظ ؟ عبر عن ذلك بكتابات مناسبة.
5. قارن بين قيم $f(x)$ و قيم $g(x)$ لما يأخذ x (على الترتيب $-x$) قيما كبيرة بالقدر الكافي.
6. خمن علاقة بين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ من جهة و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ من جهة ثانية.

النشاط الثالث

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+x-2$ و $g(x)=x^3$

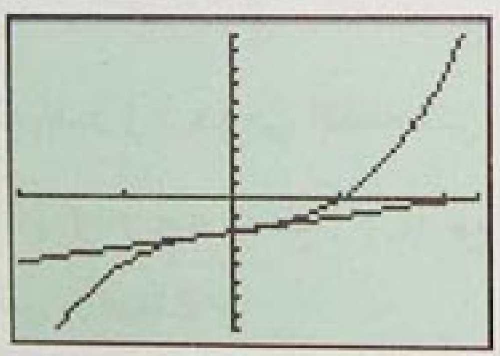
ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. باستعمال مجدول أنجز ورقتي الحساب الموالية:

	A	B	C
1	x	f(x)	g(x)
2	-10	-1012	-1000
3	-100	-1000102	-1000000
4	-1000	-1000001002	-1000000000
5	-10000	-1E+12	-1E+12
6	-100000	-1E+15	-1E+15
7	-1000000	-1E+18	-1E+18
8	-10000000	-1E+21	-1E+21
9	-100000000	-1E+24	-1E+24
10	-1000000000	-1E+27	-1E+27
11	-1E+10	-1E+30	-1E+30
12			
13			
14			

	A	B	C
1	x	f(x)	g(x)
2	10	1008	1000
3	100	1000098	1000000
4	1000	1000000998	1000000000
5	10000	1E+12	1E+12
6	100000	1E+15	1E+15
7	1000000	1E+18	1E+18
8	10000000	1E+21	1E+21
9	100000000	1E+24	1E+24
10	1000000000	1E+27	1E+27
11	1E+10	1E+30	1E+30
12			
13			
14			

2. كما في النشاطين السابقين ماذا تلاحظ ؟ عبر عن ذلك بكتابات مناسبة.
3. قارن بين قيم $f(x)$ و قيم $g(x)$ لما يأخذ x (على الترتيب $-x$) قيما كبيرة بالقدر الكافي.
4. خمن علاقة بين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ من جهة و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ من جهة ثانية.
5. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
6. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=(x-1)(x^2+x+2)$. استنتج فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.
7. ليكن (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.



- بين أن معادلة للمماس (Δ) هي: $y=x-2$.
- مثل على شاشة حاسبة بيانية كلا من (C_f) و (Δ).
- أدرس، حسب قيم x، إشارة الفرق $[f(x)-(x-2)]$.
- استنتج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لمماسه (Δ).

نلاحظ أن المنحني (C_f) يخترق مماسه عند النقطة التي فاصلتها 0. تسمى هذه النقطة نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

تعريف: نسمي نقطة انعطاف لمنحن (C_f) ممثل لدالة f كل نقطة من (C_f) يخترق فيها (C_f) مماسه عندها.

تعريف: نسمي المشتقة الثانية للدالة f و نرمز إليها بالرمز f'' الدالة المشتقة للدالة f' $[f''=(f')']$.

- أحسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f''(x)$.
- حدد حسب قيم x، إشارة $f''(x)$. ماذا تلاحظ ؟

نتيجة: إذا انعدمت $f''(x)$ مغيرة إشارتها عند قيمة x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0.

الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى

1. دراسة مثال

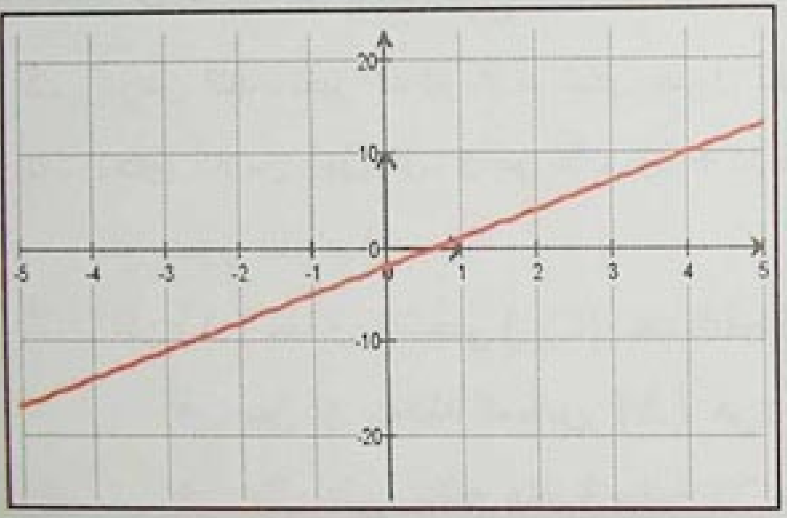
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x-2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- النهايات: لدينا حسب النشاط الأول: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3$.
- إشارة المشتقة: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

- التمثيل البياني:



<u>التقاطع مع المحورين:</u>

* $f(x)=0$ يعني $3x-2=0$ أي $x=\frac{2}{3}$ و منه يتقاطع (C_f) مع محور الفواصل $(x'x)$ في النقطة التي فاصلتها $\frac{2}{3}$.

* $f(0)=-2$ و منه يتقاطع (C_f) مع محور التراتيب $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها -2.

2. نتائج

- التمثيل البياني للدالة $f: x\mapsto ax+b$ هو المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$. لتمثيله يكفي رسم نقطتين منه.
- نلاحظ من النشاط الأول أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)$.

نقبل بصفة عامة أن:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(ax+b)=\lim_{x\to-\infty}(ax) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax+b)=\lim_{x\to+\infty}(ax)}$$

- نستنتج هكذا أنه:

* إذا كان $a>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=+\infty$.

* إذا كان $a<0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=-\infty$.

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)=+\infty$.

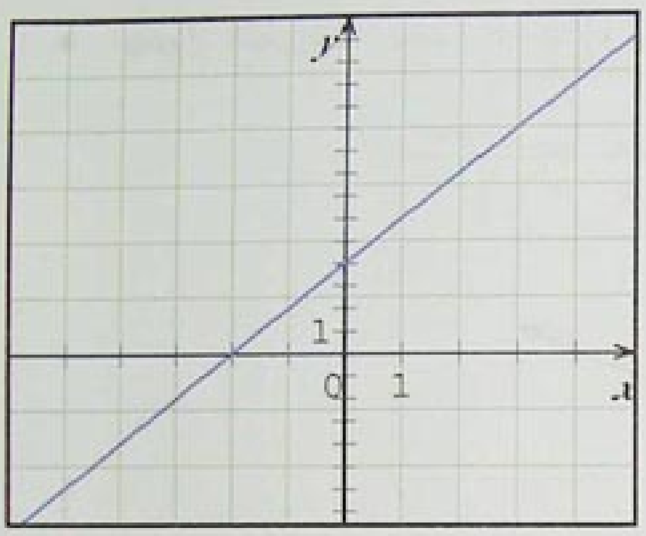
تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+4$

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أرسم في معلم متعامد المنحني (C_f) الممثل للدالة f.

حل:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$.
2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=2$. نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$
و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



1. المنحني الممثل للدالة f هو المستقيم ذو المعادلة $y=2x+4$
وتكفينا نقطتان لرسمه. فمثلا $f(0)=4$ و $f(-2)=0$.

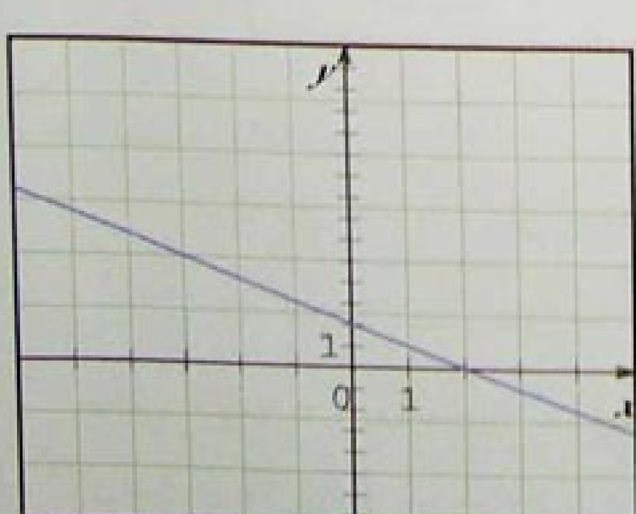
تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+2$

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أرسم في معلم متعامد المنحني (C_f) الممثل للدالة f.

حل:

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$.
3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-1$. نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)<0$
و منه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	−	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$



3. المنحني الممثل للدالة f هو المستقيم ذو المعادلة $y=-x+2$
وتكفينا نقطتان لرسمه. فمثلا $f(0)=2$ و $f(1)=1$.

ـ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

1. دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x^2-4x-6$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

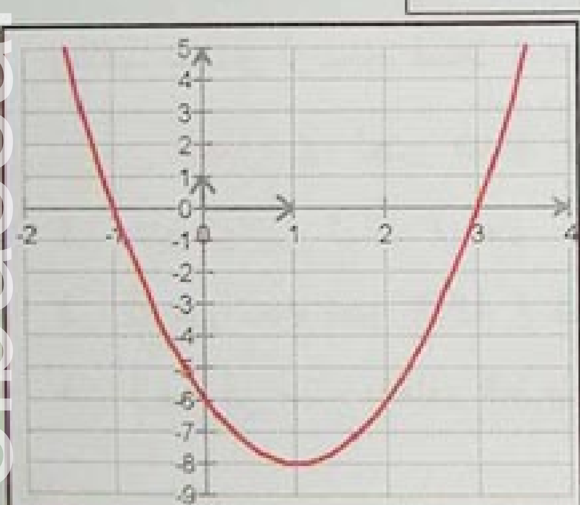
- **النهايات:** لدينا حسب النشاط الثاني: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- **المشتقة:** الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=4x-4=4(x-1)$.
- **إشارة المشتقة:** من أجل كل x من $\mathbb{R}$، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(x-1)$.

$x-1\leq 0$ يعني $x\leq 1$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$.

$x-1\geq 0$ يعني $x\geq 1$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

- **جدول التغيرات:** لدينا $f(1)=-8$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$



- **التمثيل البياني:** عند الرسم يمكن الاستعانة بنقط مساعدة.

* $2x^2-4x-6=0$ يعني $x=-1$ أو $x=3$ و منه يتقاطع (C_f) مع محور الفواصل $(x'x)$ في النقطتين اللتين فاصلتاهما (-1) و 3.

* $f(0)=-6$. يتقاطع (C_f) مع $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها -6.

2. نتائج

- يسمى التمثيل البياني للدالة $f: x\mapsto ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ قطعا مكافئا.
- نلاحظ من النشاط الثاني أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2)$.

نقبل بصفة عامة أن:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to-\infty}(ax^2) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to+\infty}(ax^2)}$$

- نستنتج هكذا أنه:

* إذا كان $a>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c)=+\infty$.

* إذا كان $a<0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty$.

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2+x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2+x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2+x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2)=-\infty$.

تمرين محلول: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2-x+2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.
4. أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.
5. أرسم في معلم متعامد المنحني (C_f) و المماس (Δ).

حل:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$.
2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-2x-1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
إشارة $-2x-1$		$+$	0	$-$	

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$

3. لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ نقوم بحل المعادلة: $-x^2-x+2=0$.

$\Delta=9$، $x'=-2$ و $x''=1$. يتقاطع إذن (C_f) مع $(x'x)$ في نقطتين فاصلتاهما -2 و 1.

لدينا $f(0)=2$ و منه يتقاطع (C_f) مع $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها 2.

4. معادلة (Δ) هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

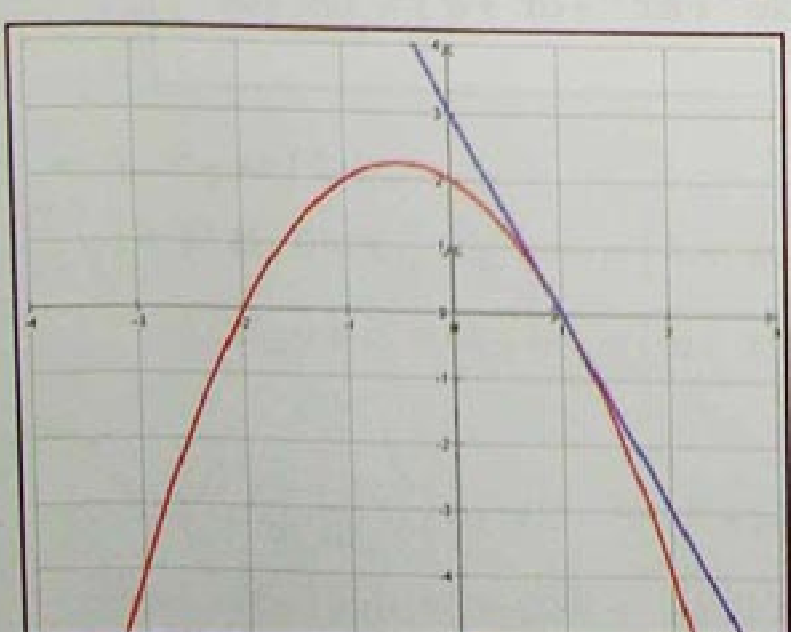
لدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=-3$

و بالتالي معادلة للمماس (Δ) هي: $y=-3x+3$.

5. لرسم المنحني (C_f) ننشئ بعض النقط المساعدة

و من أجل ذلك نملأ الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	0	2	2	0	-4



الدرس

ـ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة

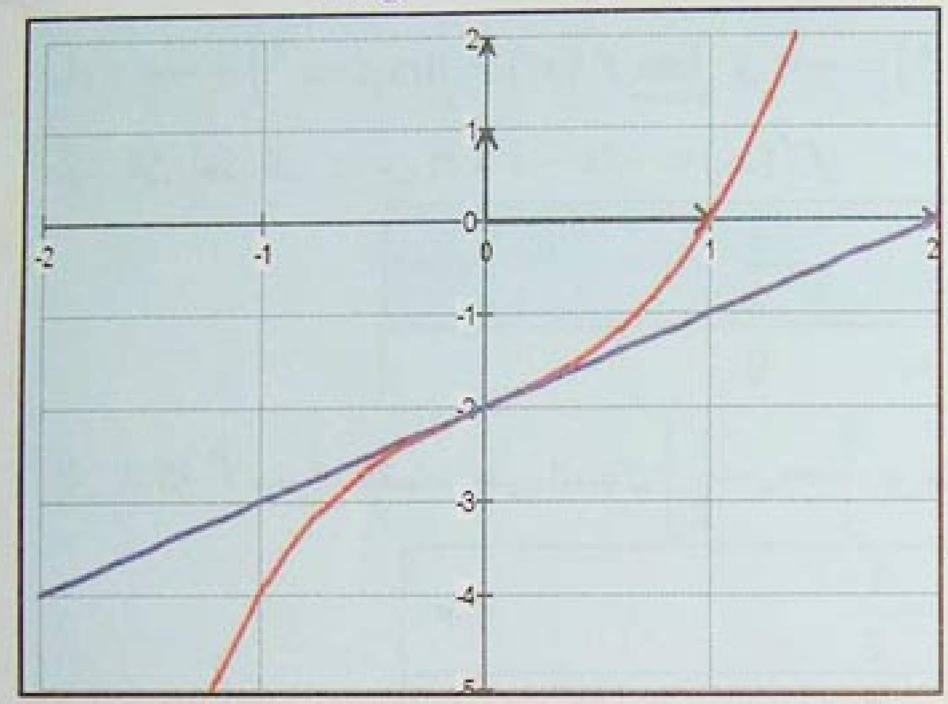
1. دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x-2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- **النهايات:** لدينا حسب النشاط الثالث: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- **المشتقة:** الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=3x^2+1$.
- **إشارة المشتقة:** من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
- **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$



- **التمثيل البياني:** مثلنا في الشكل المقابل (C_f)

و مماسه (Δ) عند نقطة الانعطاف، النقطة التي فاصلتها 0 و ترتيبها 2.

2. نتائج

- التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 بحيث أن x_0 هي القيمة التي تنعدم عندها المشتقة الثانية f'' للدالة f مغيرة إشارتها.
- نلاحظ من النشاط الثالث أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)$.

نقبل بصفة عامة أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to-\infty}(ax^3) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to+\infty}(ax^3)$$

- نستنتج هكذا أنه:

* إذا كان $a>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=+\infty$.

* إذا كان $a<0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=-\infty$.

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2-3x+1)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}(2x^3-x^2-3x+1)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^3+3x-4)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^3)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(-3x^3+3x-4)=\lim_{x\to+\infty}(-3x^3)=-\infty$$

تمرين محلول: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^3-x^2+5x+2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=(x-2)(-x^2-3x-1)$. استنتج نقط تقاطع (C_f) مع $(x'x)$.
4. أرسم في معلم متعامد المنحني (C_f).

حل:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$.

2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-3x^2-2x+5$.

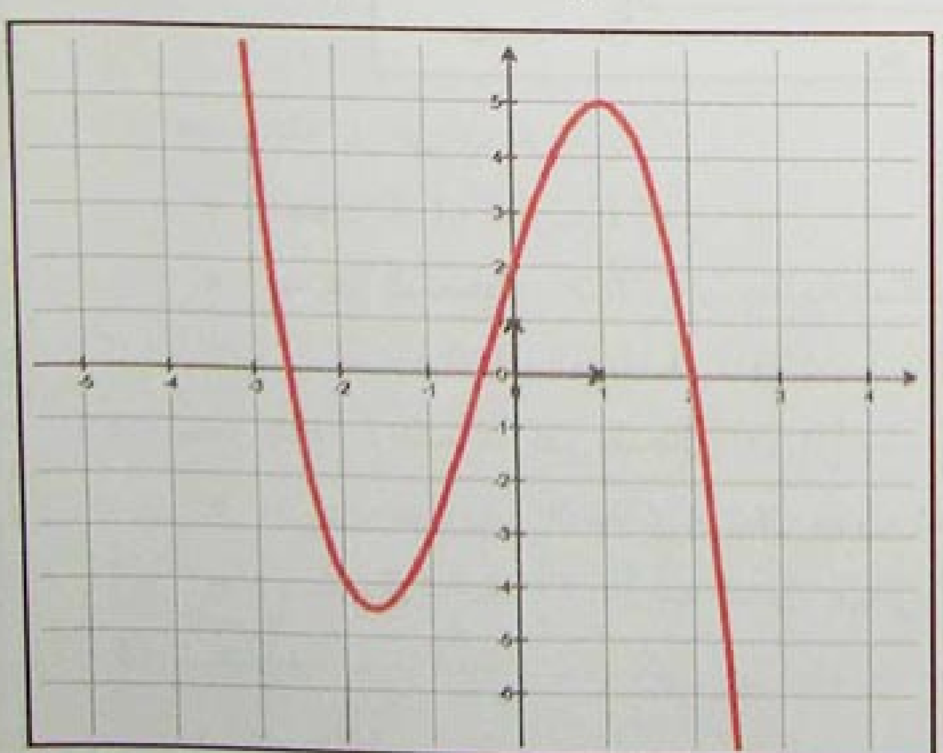
لدينا $\Delta=64$، $x'=-\frac{5}{3}$ و $x''=1$. و منه:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
إشارة $-3x^2-2x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{121}{27}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

3. نقوم بالنشر:

$$(x-2)(-x^2-3x-1)-x^3-3x^2-x+2x^2+6x+2=-x^3-x^2+5x+2=f(x)$$



$f(x)=0$ يعني $(x-2)(-x^2-3x-1)=0$

أي $x=2$ أو $-x^2-3x-1=0$

مميز $-x^2-3x-1=0$ هو $\Delta=5$ و منه الحلان هما:

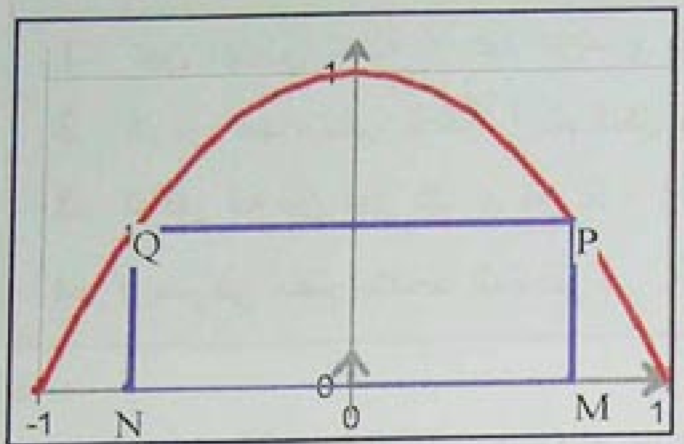
$x'=\frac{3-\sqrt{5}}{-2}$ و $x''=\frac{3+\sqrt{5}}{-2}$

القيم المقربة لحلي المعادلة $-x^2-3x-1=0$ هما: $-0,38$ و $-2,62$. يتقاطع إذن (C_f) مع $(x'x)$ في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب $-2,62$ ، $-0,38$ و 2.

4. لدينا كذلك $f(0)=2$ و منه يقطع (C_f) المحور $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها 2.

مسائل استمثال

المسألة الأولى:



نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1;1]$ بـ:

$$f(x)=1-x^2$$

و ليكن (C_f) منحنيها في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرسم داخل المنحني (C_f) مستطيلا $MNQP$ محوره (Oy) حيث تقع النقطتان M و N على المحور (Ox) بينما تقع النقطتان P و Q على المنحني (C_f).

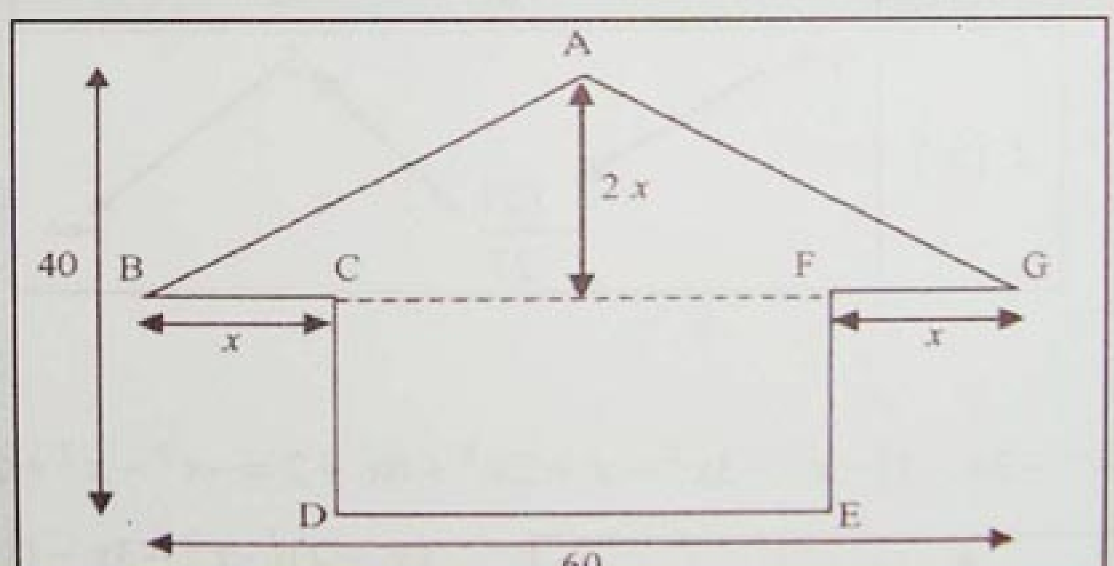
نرمز بـ $a(x)$ إلى مساحة المستطيل $MNQP$.

1. بين أن $a(x)=-2x^3+2x$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة a على المجال $[0;1]$ثم شكل جدول تغيراتها.
3. عين بعدي المستطيل $MNQP$ الذي له أكبر مساحة.

المسألة الثانية:

تريد إحدى المؤسسات صنع "رمز" لها له الشكل و الأبعاد أدناه. وحدة الأطوال هي السنتيمتر cm.

و قصد التقليص من التكاليف، نبحث عن قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أدناه أصغر ما يمكن.



1. عبر بدلالة x عن كل من:
   - الطول CD والطول CF.
   - مساحة المستطيل $CDEF$ و مساحة المثلث ABG.
2. استنتج أن مساحة الشكل المقابل هي: $4x^2-140x+2400$.
3. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;20]$ بـ: $f(x)=4x^2-140x+2400$
   - أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
   - باستعمال حاسبة بيانية أرسم التمثيل البياني للدالة f.
4. استنتج مما سبق قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أصغر ما يمكن. حدد هذه المساحة.

الربط بين مساحة، دالة و منحنى

إليك في ما يلي أربع وضعيات هندسية، أربع منحنيات ممثلة في معلم متعامد و متجانس و أربع دوال.

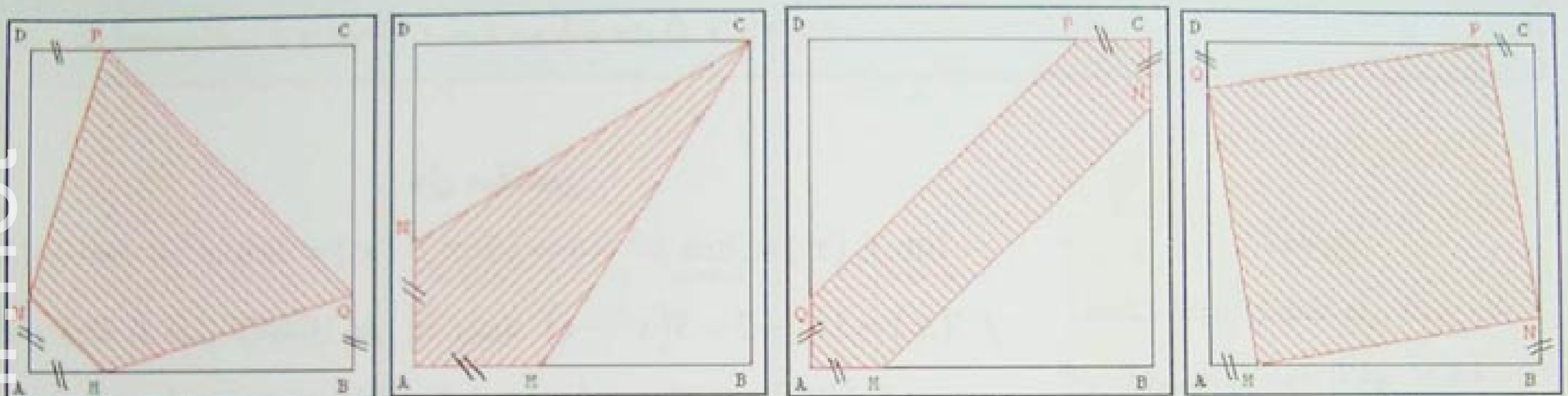
$ABCD$ مربع طول ضلعه1 و M نقطة متغيرة من القطعة المستقيمة $[AB]$.

كل منحنى من المنحنيات الأربعة يمثل مساحة جزء مظلل من الأجزاء الأربعة بدلالة x حيث $x = AM$.

1. أرفق بكل شكل هندسي المنحني و الدالة المقابلة له. يتم تبرير مختلف الاختيارات.

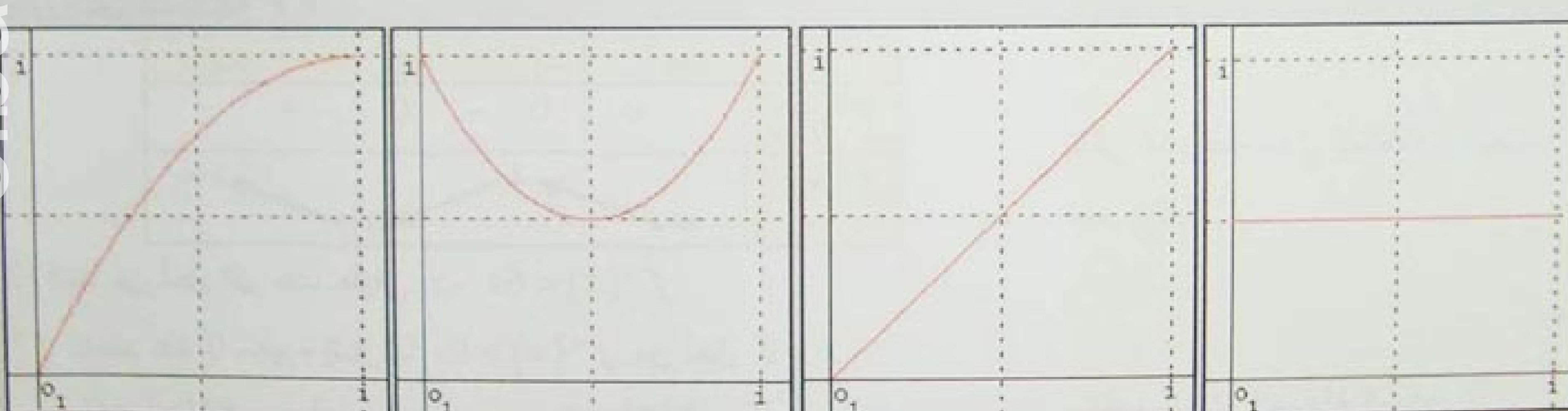
2. عين في كل حالة وضعية النقطة M التي تكون من أجلها مساحة الجزء المضلل مساوية لـ $\frac{3}{4}$ ؟

- الوضعيات الهندسية:



(4) (3) (2) (1)

- المنحنيات:



(4) (3) (2) (1)

- الدوال:

$$(1):\ f_1(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

$$(2):\ f_2(x) = x$$

$$(3):\ f_3(x) = \frac{1}{2}$$

$$(4):\ f_4(x) = -x^2 + 2x$$

3. عين جدول تغيرات كل دالة من الدوال الأربعة أعلاه.

موضوع محلول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x+2$.

$\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{I};\vec{J})$.

1) أ - أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

ب - أدرس اتجاه تغيّر الدالة f واستنتج جدول تغيّراتها.

2) برهن أن النقطة A من المنحني $\mathcal{C}$ التي فاصلتها $x=0$ هي نقطة انعطاف للمنحني $\mathcal{C}$.

3) اكتب معادلة للمماس Δ للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة A .

4) بين أن المستقيم d الذي معادلته $y=2$ يقطع المنحني $\mathcal{C}$ في ثلاث نقط يطلب تعيين إحداثياتها .

5) احسب $f(2)$ و $f(-2)$ ثم ارسم كلا من Δ و $\mathcal{C}$.

حل مختصر

1) أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

ب - الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

لدينا -1 و 1 هما جذران لثلاثي الحدود x^2-1 ومنه جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	-	0	+	

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=6x$

f'' تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها ، $f''(x)>0$ من أجل $x>0$

و $f''(x)<0$ من أجل $x<0$ و $f(0)=2$

إذن $A(0;2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني $\mathcal{C}$

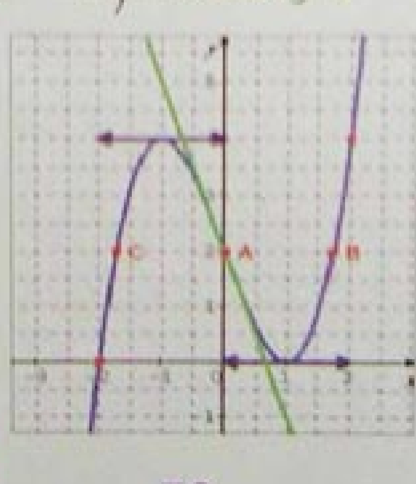
3) $f'(0)=-3$ إذن معادلة للمماس Δ هي : $y=-3x+2$.

4) نحل المعادلة $f(x)=2$ أي $x^3-3x+2=2$ ومعناه $x(x^2-3)=0$

أي $x=0$ أو $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$.

إذن d يقطع $\mathcal{C}$ في نقط $A(0;2)$ ، $B(\sqrt{3};2)$ و $C(-\sqrt{3};2)$

5) $f(2)=4$ و $f(-2)=0$.



تعاليق

لحساب النهاية نعتمد على المبرهنة التي تنص على الحد الأكبر درجة لكثير الحدود .

لإيجاد الجذرين يكفي حل المعادلة $x^2=1$.

تذكر المبرهنة حول المشتقة و اتجاه تغيّر دالة .

تطبيق مباشر لمعادلة المماس

الهدف من السؤالين الرابع والخامس تعيين بعض النقط المساعدة لإنشاء المنحني

موضوع مع إرشادات

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^{3}-3x^{2}$.

$\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{I};\vec{J})$.

1. أحسب النهايتين للدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .
3. جد معادلة المماس Δ للمنحني $\mathscr{C}$ عند النقطة التي فاصلتها 0 .
4. بين أن للمنحني $\mathscr{C}$ مماسين T و T' ميل كل منهما 9 يطلب إيجاد معادلتيهما .
5. أرسم المماسات Δ ، T و T' ثم المنحني $\mathscr{C}$ في نفس المعلم .

إرشادات

1. لحسب النهايتين للدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$اعتمد على مبرهنة الحد الأعلى درجة .
2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f هو حساب الدالة المشتقة ثم دراسة إشارتها .
3. تطبيق مباشر لمعادلة المماس .
4. للإجابة عن هذا السؤال ، نحل المعادلة $f'(x)=9$ وتجد حلين لها وهما فاصلتا نقطتي التماس .
5. لاحظ أن Δ موازيا لحامل محور الفواصل ،والمستقيمين T و T' متوازيين ولرسم المنحني $\mathscr{C}$ ابحث عن بعض النقط المساعدة مثلا تقاطعه مع محور الفواصل .

تمارين

تمارين تطبيقية

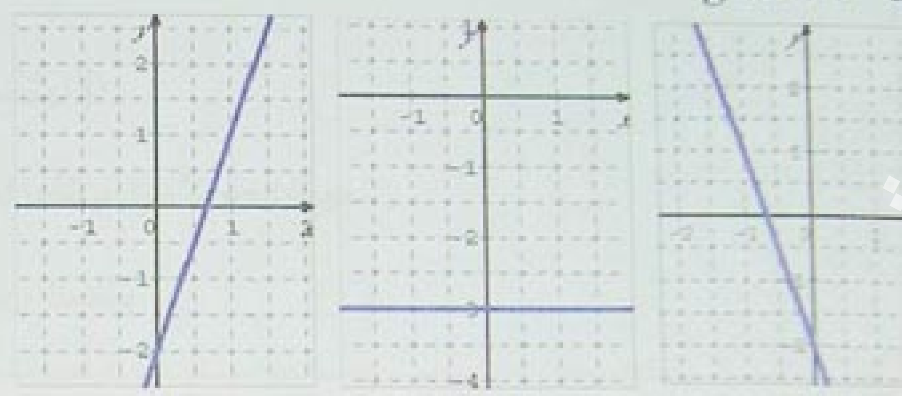
في كل التمارين ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس .

1 - الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى .

1 أرفق كل دالة بتمثيلها لبياني :

$g : x \mapsto -3x - 2$ ؛ $f : x \mapsto 3x - 2$ ؛

$g : x \mapsto -3$



2 أرفق كل دالة بجدول تغيّراتها :

$g : x \mapsto -2x - 3$ ؛ $f : x \mapsto 2x - 3$ ؛

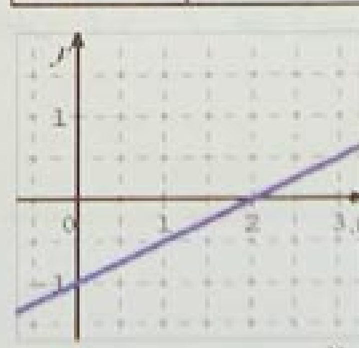
$g : x \mapsto -3x$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-6	↘

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	1	↗

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-7	↘

3 1) أنجز جدول تغيرات الدالة f المعطى تمثيلها البياني التالي :



2) عين إحداثيات نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري الإحداثيات .

3) ما هي إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-3;5]$ بـ :

$f(x) = -x + 1$

5 أنجز جدول تغيّراتها ثمّ مثلها بيانيا .

مثّل بيانيا الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = 4x + 1$.

2 - الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية .

• في التمارين من **6** إلى **9** المطلوب دراسة تغيرات الدالة f ثم مثلها بيانياً في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;I,J)$

6 $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

7 $f(x) = x^2 - 5x + 6$

8 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

9 $f(x) = 2(x-1)(3-x)$

10 f وَ g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = 3x^2 - 7x - 20$ وَ $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

(C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب في معلم.

1.أ- حل المعادلة $f(x) = g(x)$.

ب- عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) .

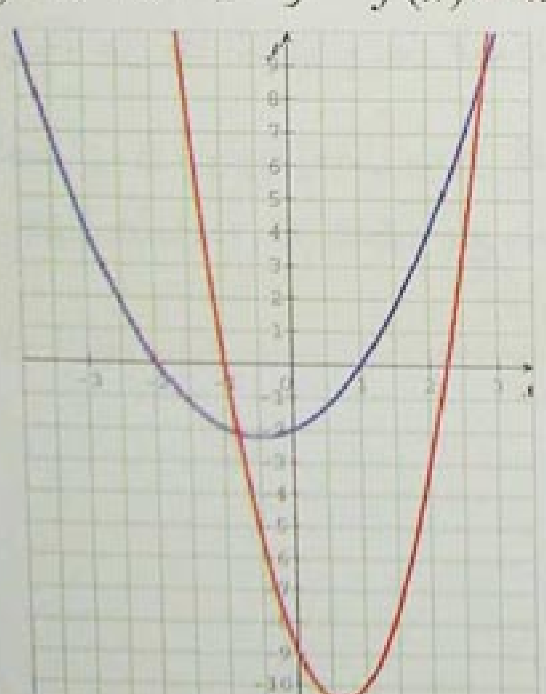
2.أ- ادرس إشارة $f(x) - g(x)$ حسب قيم x .

ب-استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

يمكن مشاهدة النتائج بيانيا برسم المنحنيين (C_f) و (C_g) على شاشة الحاسبة البيانية.

11 في الشكل الموالي مثلنا المنحنيين البيانيين (C_f) و (C_g) للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = 4x^2 - 5x - 9$ وَ $g(x) = x^2 + x - 2$.



1.حل المعادلتين $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$.

2.عين فواصل نقط تقاطع (C_f) و (C_g) .

3.حل المتراجحة $f(x) > g(x)$.

3 - الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة .

12 باستعمال جدول تغيرات الدالة f عين مجموعة تعريفها و النهايات عند حدود مجموعة التعريف ؛
عيّن اتجاه تغيرها ، مثلها بيانيا .

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

13 ادرس تغيرات الدالة f ثم مثلها بيانياً في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;I,J)$

1) $f(x)=3x^3-6x+3$

2) $f(x)=x^3-5x+6$

3) $f(x)=-x^3+2x^2$

4) $f(x)=(x+2)(x-1)(3-x)$

14 ادرس تغيرات الدالة f ثم أثبت أن النقطة I نقطة انعطاف لـ (C_f) منحني الدالة f و ارسم (C_f)

1) $f(x)=x^3-x+1$ و $I(0;1)$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x+1$ و $I(0;-1)$

3) $f(x)=x^3-3x^2+3$ و $I(1;1)$

15 لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث أن :
$f(x)=x^3-3x^2+4x-5$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O,I,J) .

1.عين معادلة للمماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

2.ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y=x-4$.
بين أن $f(x)-(x-4)=(x-1)^3$.

3.أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D).

16 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=x^3-3x-3$.

1.ادرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. احسب f' مشتقة الدالة f .

3. شكل جدول تغيرات الدالة f .

4.نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
عين معادلة المماس T للمنحني عند النقطة التي فاصلتها0.

5.ارسم T و (C) على المجال $[-2;2,5]$.

17 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=x^2-3x$ و $g(x)=x^3-3x$

1.دراسة الدالة f :

أ- احسب f' مشتقة الدالة f

ب- ادرس إشارة f' ثم استنتج جدول تغيرات f .

2. دراسة الدالة g :

أ- احسب g' مشتقة الدالة g

ب- ادرس إشارة g' ثم استنتج جدول تغيرات g .

3.المقارنة بين الدالتين f و g :

أ- ارسم (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
(اقتصر الرسم على المجال $[-2;2]$)
بقراءة بيانية ، اذكر عدد نقط تقاطع (C_f) و (C_g) و عين إحداثيات هذه النقط.

ب-حل المعادلة $f(x)=g(x)$.

جـ-استنتج بالحساب إحداثيات نقط تقاطع (C_f) و (C_g).

تمارين للتعمق

1 - الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى .

• في التمارين من **18** إلى **21** أنشئ التمثيل البياني للدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

18 $f: x \mapsto 4x-3$.

19 $f: x \mapsto -3x+4$.

20 $f: x \mapsto -\dfrac{1}{2}x+2$.

21 $f: x \mapsto \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

• في التمارين من **22** إلى **25** المطلوب :

- حساب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
- حساب الدالة المشتقة وتعيين إشارتها .
- إنشاء جدول تغيرات الدالة f ورسم منحنها .

تمارين

22 $f : x \mapsto 5x - 1$.

23 $f : x \mapsto -5x + 4$.

24 $f : x \mapsto -\frac{5}{2}x + 5$.

25 $f : x \mapsto \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$.

2 - الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية .

26 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$. $\mathcal{C}_f$ منحنيها البياني .

1. أحسب النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$ للدالة f
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f .
3. عين نقطتي تقاطع $\mathcal{C}_f$ مع حامل محور الفواصل ثم عند كل من هاتين النقطتين ، أكتب معادلة لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$.
4. أنشئ المنحني $\mathcal{C}_f$.

27 مثل بيانيا كل من المنحنيات المعرفة بمعادلاتها التالية:

$$\mathcal{C}_1 : y = \frac{2x^2}{5} \quad ; \quad \mathcal{C}_2 : y = -x^2 + 4$$

$$\mathcal{C}_3 : y = x^2 - 3x + 2$$

28 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

(C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالتين f و g .
2. أنشئ (C_f) و (C_g).
3. عين جبريا احداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) ، ثم تحقق من النتائج بيانيا.
4. ادرس جبريا إشارة $f(x) - g(x)$ ، أعط تفسيرا بيانيا لهذه الإشارة.

29 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = x^2 - x - 1$ و $g(x) = 3 - x$

(C_f) و (D) التمثيلين البيانيين للدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. احسب f' مشتقة الدالة f و ادرس إشارتها.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. عين معادل المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتاهما $x_0 = 2$.
5. حل جبريا المعادلة $f(x) = g(x)$.
6. عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) و (D) .
7. ارسم T ، (D) و (C_f) في نفس المعلم.

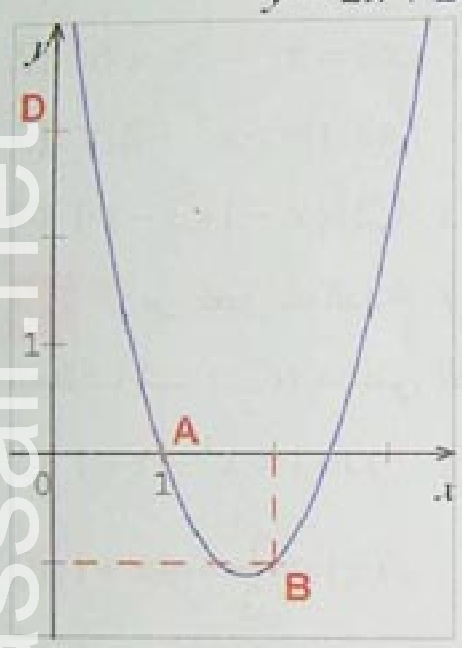
30 نعتبر في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ القطع المكافئ P الذي معادلته $y = ax^2 + bx + c$ ، $(a \neq 0)$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c علما أن P يقطع محور الفواصل (Ox) في النقطة A التي فاصلتها 3 و يقطع محور التراتيب (Oy) في النقطة B التي ترتيبها 2 و يقبل مماسا عند هذه النقطة معادلته $y = 2x + 2$

31 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية، و Γ تمثيلها البياني في الشكل المقابل.



A و B نقطتان من Γ ، المماس للمنحني Γ عند A يشمل النقطة $D(0;3)$

1. بقراءة بيانية احسب كلا من $f(1)$ ، $f(2)$ و $f'(1)$
2. باستعمال النتائج السابقة عين a ، b و c .

3 - الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة .

32 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$.

(C) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) أثبت أن النقطة $S(1;-3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C).

3) ارسم (C) .

33 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{13}{12}$$

1. أحسب نهايتي الدالة f بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.
2. أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على $\mathbb{R}$.

3. شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. أثبت أن النقطة $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ نقطة انعطاف للرسم البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

5. استنتج حلول المعادلة : $f(x)=0$

6. مثّل بيانيا الدالة f .

34 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=x^3-3x-1$$

1. ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (اتجاه التغير و النهايات).

2. عين معادلة المماس T للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3. حدّد وضعية المماس T بالنسبة للمنحنى (C) .

4. نعتبر القطع المكافئ P الذي معادلته $y=x^2-2x+1$

أ- ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$g(x)=x^2-2x+1$$

ب- تحقق من أن النقطة $A(2;1)$ نقطة مشتركة بين (C) و P .

5. أ- تحقق من أن :

$$x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$$

ب- ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى P.

6. ارسم المنحنيين (C) و P في نفس المعلم .

35 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;0,5]$ بـــ :

$$f(x)=x^3+\frac{19}{2}x^2+\frac{11}{2}x-3$$

نرمز بـــ(C) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1. احسب f' مشتقة الدالة f ثم ادرس إشارتها.

2. شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-2;0,5]$.

3. بين أن $f(-2)=0$ ثم تحقق أن :

$$f(x)=(x+2)(3x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

4. حل في المجال $[-2;0,5]$ المعادلة $f(x)=0$ ، استنتج أن المنحني (C) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط يطلب تعيين إحداثياتها. 5. عين معادلتي المماسين T_1 و T_2 للمنحني (C) عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و $\frac{-19-\sqrt{163}}{18}$ على الترتيب.

6. ارسم T_1 ، T_2 و (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

مسائل

36 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=-x^3+3x$.

$\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{J})$.

1) بين أن الدالة f فردية .

2) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني $\mathscr{C}$ مع حامل محور الفواصل .

3) أدرس تغيرات الدالة f .

4) أكتب معادلة للمماس Δ للمنحني $\mathscr{C}$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=\sqrt{3}$.

5) أنشئ Δ ثم المنحني $\mathscr{C}$.

37 بكالوريا

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x+1$.

يرمز $\mathscr{C}$ للمنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{J})$.

1) أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(1)$ و $f(-1)$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند حدّي مجال التعريف .

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f وأنجز جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس Δ للمنحني $\mathscr{C}$ عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

4) عين نقط تقاطع المنحني $\mathscr{C}$ مع المستقيم الذي معادلته $y=1$. أرسم Δ ثم $\mathscr{C}$.

38 1. نريد البحث عن دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة f ، علما أن منحنيها البياني (C_f) الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يحقق الشروط التالية:

- (C_f) يشمل النقطة O و يقبل في هذه النقطة مماسا معامل توجيهه 2-.

- المماس للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 موازي للمستقيم الذي معادلته $y=3x+1$.
- النقطة $A(-1;2)$ تنتمي إلى (C_f).

نضع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ،عين الدالة f.

فيما يلي نقبل أن: $f(x)=x^3+x^2-2x$

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل .

3.أعط معادلة المماس T للمنحني (C_f) عند O ، عين نقطة تقاطعه مع (C_f).

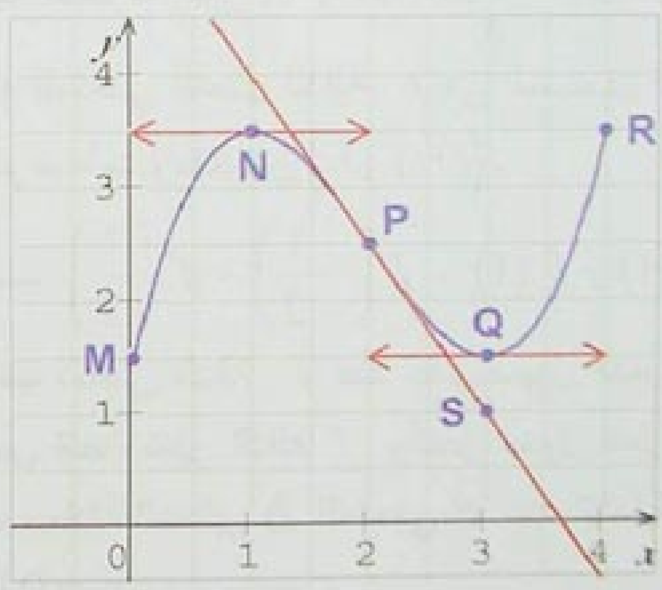
4.جد فواصل نقط المنحني (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا لمحور الفواصل.

5.نريد البحث عن الفاصلة a لنقط من المنحني (C_f) يكون عندها المماس يشمل النقطة O .

ا- بين أن a هي حل للمعادلة $f(a)=af'(a)$.

ب- عين النقط المطلوبة.

39 لتكن f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;4]$ و C تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$



النقط M ، N ، P ، Q و R تنتمي إلى C .المنحني C يقبل في كل من النقطتين N و Q مماس موازيا لحامل محور الفواصل.المستقيم Δ هو المماس للمنحني C في النقطة $P\left(2;\frac{5}{2}\right)$. و يشمل النقطة $S(3;1)$.

1.أ) عين $f'(1)$ ، $f'(2)$ و $f'(3)$

ب) عين معادلة للمستقيم Δ .

2. أ) عين باستعمال التمثيل البياني عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ على المجال $[0;4]$

ب) ارسم المستقيم الذي معادلته $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ ثم حل المتراجحة $f(x)<\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$

3. الدالة f هي مشتقة دالة F معرفة على $[0;4]$.أعط تغيرات الدالة F مبررا الجواب.

40 نعتبر مستطيلا محيطه P يساوي $4cm$.

1.عين أبعاد هذا المستطيل (طوله L و عرضه ℓ) علما أن مساحته S تساوي $\frac{3}{4}cm^2$.

2.نريد أن نعين أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته عظمى.

أ- عبر عن S بدلالة ℓ .

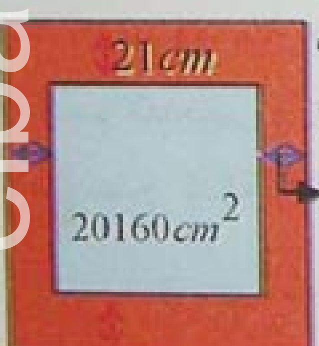
ب- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=x(2-x)$$

احسب f' مشتقة الدالة f و ادرس إشارتها . شكل جدول تغيرات الدالة f .ارسم (C_f) المنحني الممثل للدالة f على المجال $[0;2]$

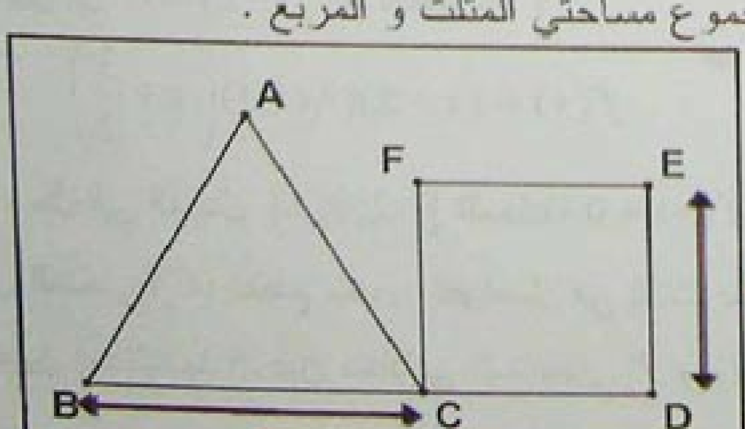
جـ- استنتج أبعاد المستطيل بحيث يكون محيطه P يساوي $4cm$ ومساحته S عظمى.

41 باب محل تجاري شكلها مستطيل، وسطها زجاجة مساحتها $20160cm^2$ ومحيطة بالخشب حيث عرض الخشب لكل من اليمين واليسار يقدر بـ $15cm$ ولكل من الأعلى والأسفل يقدر بـ $21cm$



أحسب بعدي الباب حيث تكون مساحتها الكلية أصغر ما يمكن .

42 بنفس الخيط الذي طوله $1m$ نصنع مثلثا متقايس الأضلاع طول ضلعه x و مربعا طول ضلعه a ، نرمز بـ S إلى مجموع مساحتي المثلث و المربع .



1.بين أن $S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{1}{16}(1-3x)^2$

2. من أجل أية قيمة لـ x تكون المساحة S صغرى؟

3.من أجل قيمة x المحصل عليها،احسب $\frac{x}{a}$.

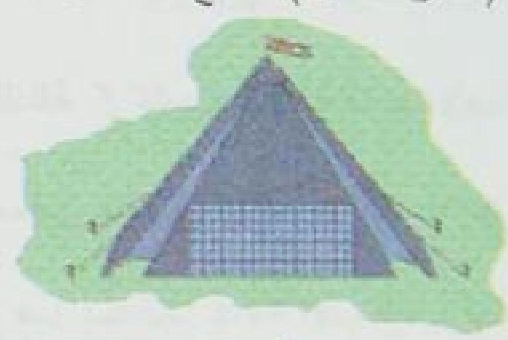
43 عند صنع خيمة ، نريد الحصول على أكبر قدر ممكن من التهوية عندما يكون مدخل الخيمة مفتوحا.

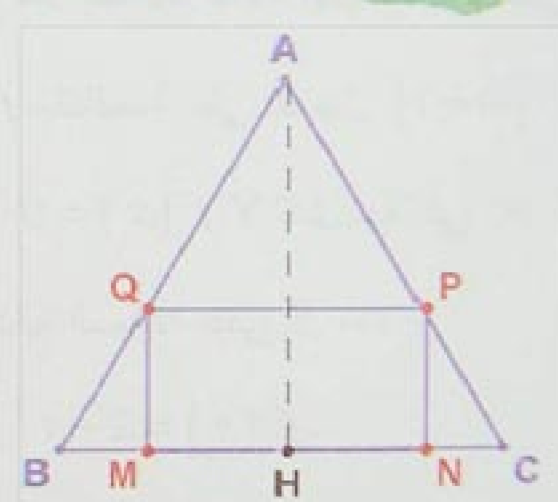
وضعنا مقطعا لمدخل الخيمة مثلثا متقايس الأضلاع ABC طول ضلعه $2cm$.

المستطيل $MNPQ$ داخل المثلث ABC يرفق بمقطع الباب.

نريد إذن تعيين النقطة M من القطعة $[BC]$ بحيث تكون مساحة المستطيل $MNPQ$ عظمى.

لهذا ، نعتبر النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).(انظر الشكل).نضع $BM=NC=x$





1. بين أن مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها x هي المجال $[0;1]$.

2.بين أن $AH=\sqrt{3}$.

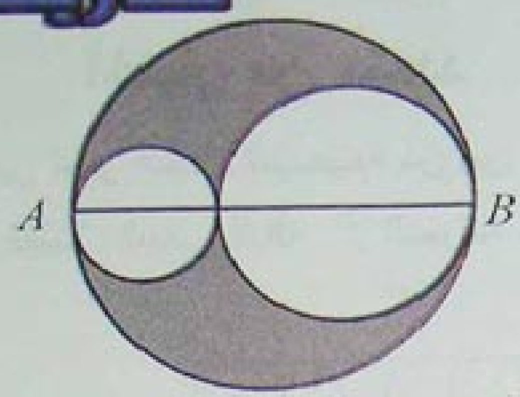
3.باستعمال مبرهنة طالس بين أن $MQ=\sqrt{3}x$

4.استنتج أن المساحة S للمستطيل $MNPQ$ هي : $S(x)=2\sqrt{3}\left(x-x^2\right)$.

5.ادرس تغيرات الدالة S على المجال $[0;1]$.

6. استنتج بعدي المستطيل $MNPQ$ حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن.

44 نعتبر دائرة قطرها $[AB]$ حيث $AB=4$. M نقطة من $[AB]$.ننشئ الدائرتين اللتين قطراهما $[AM]$ و $[MB]$.



نضع $AM=x$ و نرمز بـ $A(x)$ إلى مساحة الحيز الملون .

1. بين أن $A(x)=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$.

2. عين وضعية النقطة M حتى تكون المساحة $A(x)$ عظمى.

3.هل توجد وضعية للنقطة M تكون من أجلها المساحة $A(x)$ أكبر تماما من مجموع مساحتي القرصين اللذين قطراهما $[AM]$ و $[MB]$ ؟

4. عين وضعيات النقطة M التي تكون من أجلها المساحة $A(x)$ أصغر من نصف مساحة القرصين اللذين قطراهما $[AM]$ و $[MB]$.

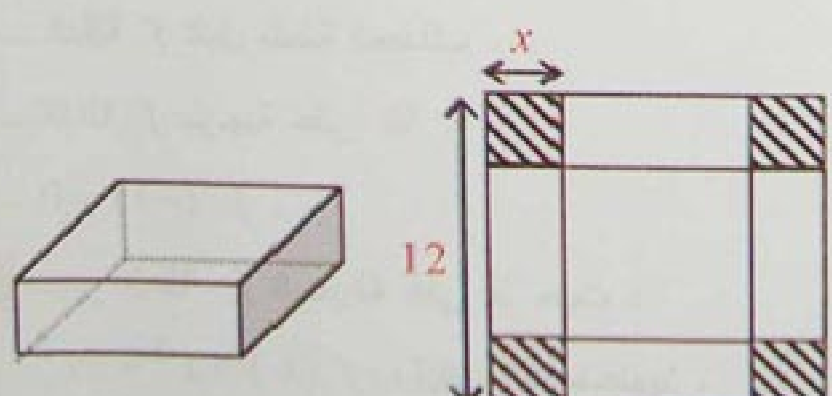
45 1.لتكن V الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$V(x)=4x^3-48x^2+144x$.

أ- ادرس تغيرات الدالة V .

ب- أرسم التمثيل البياني للدالة V في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2$ و $\|\vec{j}\|=100$.

ورقة مربعة طول ضلعها $12cm$ ، نقطع من كل زاوية منها مربعا طول ضلعه x بغرض صنع علبة.



أ- بين أن مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها x هي المجال $[0;6]$.

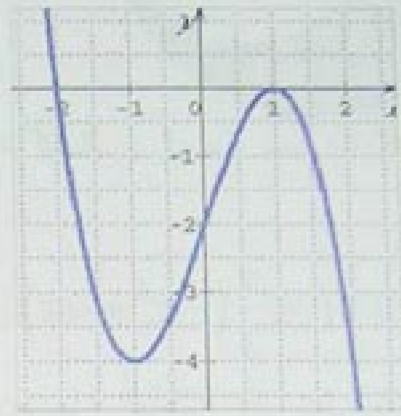
ب- بين أن حجم العلبة معطى بـ $V(x)$.

جـ- عين قيمة x التي تجعل الحجم V يأخذ أكبر قيمة ممكنة، عين قيمة هذا الحجم.

اختيار من متعدد

في كل تمرين اختر الجمل الصحيحة من بين الاقتراحات .

46 يعطى التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$.



أ ـ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب ـ إشارة $f'(x)$ هي موجبة على $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$ وسالبة على $[-1;1]$.

ج ـ من أجل كل عدد حقيقي x تكون $f(x) \geq 0$

د ـ منحني الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط بالضبط .

47 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث يعطى جدول تغيّراتها كالآتي :

x	$+\infty$	-1	$-\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

أ ـ الدالة المشتقة للدالة f تنعدم دون أن تغير من إشارتها على $\mathbb{R}$.

ب ـ الدالة f تقبل نقطة انعطاف .

ج ـ الدالة f موجبة على $\mathbb{R}$.

د ـ $f'(-1) = 0$.

48 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث :

$f(x) = x^3 - 3x^2$ وليكن $\mathscr{C}$ منحنيها .

أ ـ $f'(x) = 3x^2 - 6$.

ب ـ $\mathscr{C}$ يقطع حامل الفواصل في ثلاث نقط .

ج ـ الدالة f فردية .

د ـ النقطة $\omega(1;-2)$ نقطة انعطاف للمنحني $\mathscr{C}$.

صحيح أم خاطئ

49 1) نقطة انعطاف منحنى دالة كثير حدود هي نقطة من المنحني .

2) منحنى دالة زوجية يقبل نقطة انعطاف .

3) منحني كل دالة كثير حدود يقبل نقطة انعطاف .

4) كل دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة تكون فردية.

5) منحني كل دالة كثير حدود من الدرجة الثانية يقبل نقطة انعطاف.

50 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = x^2 - 2x + 1$.

1) منحني الدالة f يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(1;0)$.

2) معادلة مماس منحني الدالة f عند 0 هي $y = x + 2$.

3) $(0;1)$ هما إحداثيتا نقطة الانعطاف لمنحني الدالة f .

4) الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

5) المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

51 f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = 2 - x^2 - x^3$.

1) يوجد عددان حقيقيان a و b حيث :

$f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$.

2) منحني الدالة f يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقط .

3) منحني الدالة f ومنحني الدالة $g : x \mapsto x^3$، يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2.

4) منحني الدالة f ومنحني الدالة $g : x \mapsto x^3$، يتقاطعان في النقطتين مجموع فاصلتيهما معدوما .

5) منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف .

5 الدوال التناظرية 5

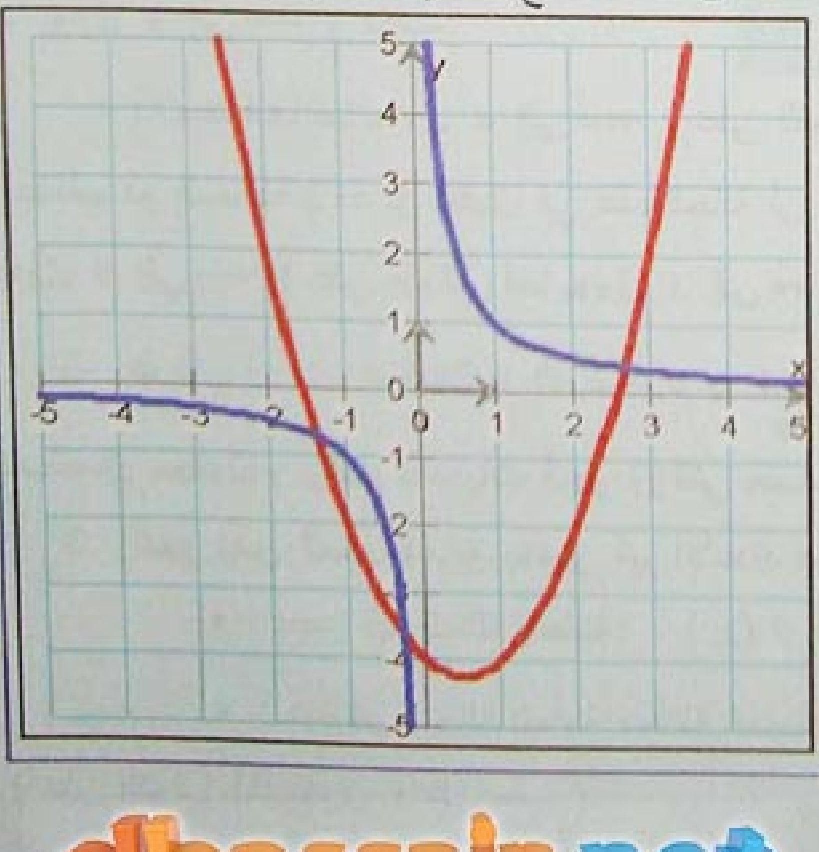
الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لدالة لتخمين النهايات عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
- تحديد نهايتي دالة تناظرية عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
- تعيين المستقيمات المقاربة و تفسيرها بيانيا.

عمر الخيام (1040-1131م)

حكيم وفلكي وعالم رياضيات وشاعر هو غياث الدين أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيام ولد في نيسابور عاصمة خراسان، بدأ تعليمه الأولي في إحدى مدارس نيسابور لتعلم القراءة والكتابة، ولما قوي واشتد ساعده رحل إلى سمرقند لدراسة الرياضيات،فأنجز نظاماً للأرقام أكثر اتساعاً من نظام الإغريق، فألف كتاباً بالعربية (الجبر والمقابلة) ترجم إلى الفرنسية عام (1851). كما أوجد طريقة لاستخراج جذور الأرقام وعالج لأول مرة مسائل التكعيب في الجبر ولما برزت موهبته في علم الفلك إلى جانب شهرته في الرياضيات، استدعاه السلطان السلجوقي لتعديل التقويم، وكلفه ببناء برج فلكي في أصفهان ، وإن إجادته للغة العربية والكتابة بها كانت حافزاً له لقراءة شعر المعري فكان له الأثر في شعر الرباعيات لغة وأسلوباً ومضموناً فلقب بالحكيم في الثقافتين الفارسية والعربية ولقبه الأوربيون بملك الحكمة.

في كتاب الجبر والمقابلة قدم طريقة هندسية لحل بعض المعادلات باستعمال نقط تقاطع منحنيات مألوفة.



فمثلا لحل المعادلة من الدرجة الثالثة: $x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$

استعمل عمر الخيام تقاطع القطع الزائد ذي المعادلة $y = \frac{1}{x}$

و القطع المكافئ ذي المعادلة $y = x^2 - x - 4$.

يقول عمر الخيام في ما أنسب إليه من شعر:

أفنيتُ عمري في اكتناه القضـــاء

وكشف ما يحجبـــه في الخـــفاء

فلم أجـد أســراره وانقضـــى

عمري وأحسست دبيب الفـــناء

الأنشطة

النشاط الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq 0$

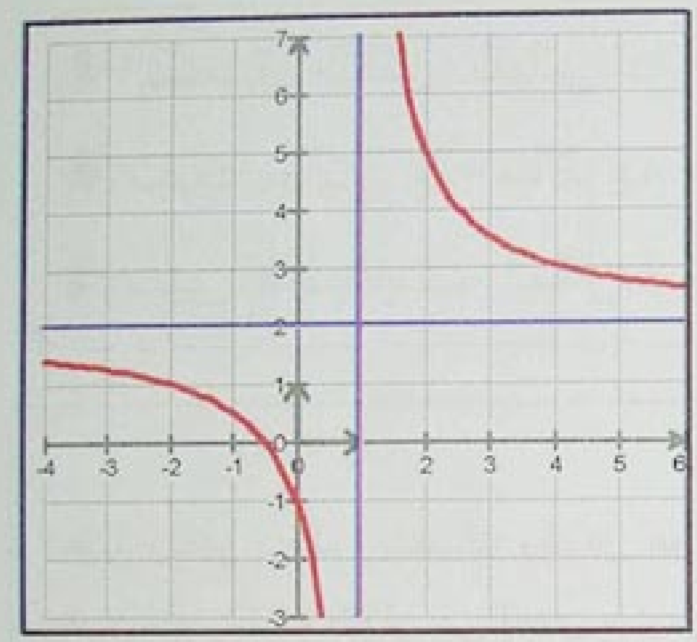
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. نفرض أن $a=2$ ، $b=1$ ، $c=1$ و $d=-1$ أي أن $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$.

باستعمال مجدول و راسم منحنيات أنجز ورقتي الحساب و التمثيل البياني (C_f) أدناه:

	A	B
1	x	f(x)
2	10	2.333333333
3	100	2.03030303
4	1000	2.003003003
5	10000	2.00030003
6	100000	2.00003
7	1000000	2.000003
8	10000000	2.0000003
9	100000000	2.00000003
10	1000000000	2.000000003
11	1E+10	2
12		
13		
14		

	A	B
1	x	f(x)
2	-10	1.727272727
3	-100	1.97029703
4	-1000	1.997002997
5	-10000	1.99970003
6	-100000	1.99997
7	-1000000	1.999997
8	-10000000	1.9999997
9	-100000000	1.99999997
10	-1000000000	1.999999997
11	-1E+10	2
12		
13		
14		



* نلاحظ، من خلال ورقة الحساب الأولى و كذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $f(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيما كبيرة بالقدر الكافي. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي 2 لما يؤول x إلى $+\infty$ و نكتب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

* كما نلاحظ، من خلال ورقة الحساب الثانية و كذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $f(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ $(-x)$ قيما كبيرة بالقدر الكافي. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي 2 لما يؤول x إلى $-\infty$ و نكتب:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

* نلاحظ أنه، لما يؤول x إلى $+\infty$ (على التوالي لما يؤول x إلى $-\infty$) ، المنحني (C_f) يقترب تدريجيا من المستقيم ذو المعادلة $y=2$. نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ (على التوالي لما يؤول x إلى $-\infty$).

2. نفرض أن $a=-1$ ، $b=2$ ، $c=2$ و $d=3$ أي أن $f(x)=\frac{-x+2}{2x+3}$.

باستعمال مجدول و راسم منحنيات أنجز ورقتي حساب مماثلة لتلك المنجزة أعلاه و التمثيل البياني (C_f). ماذا تستنتج ؟

3. أنجز نفس العمل السابق بتغيير قيم الأعداد a ، b ، c و d.

- خمن في الحالة العامة: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
- حدد في الحالة العامة معادلة المستقيم المقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ (على التوالي لما يؤول x إلى $-\infty$).

النشاط الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$

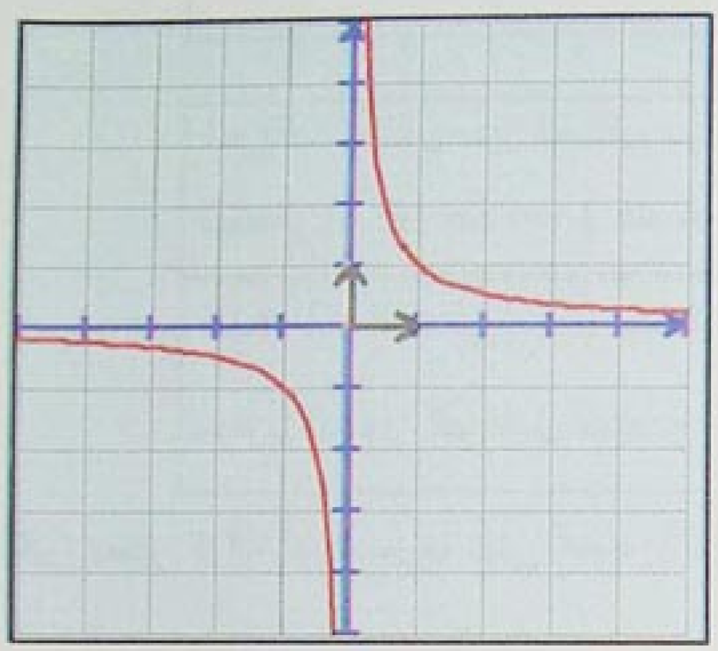
ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. نفرض $a=0$ أي أن $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

باستعمال مجدول و راسم منحنيات أنجز ورقتي الحساب و التمثيل البياني (C_f) أدناه:

	A	B
1	x	f(x)
2	0.1	10
3	0.01	100
4	0.001	1000
5	0.0001	10000
6	0.00001	100000
7	0.000001	1000000
8	0.0000001	10000000
9	0.00000001	100000000
10	1E-09	1000000000
11	1E-10	10000000000
12	1E-11	1E+11
13		
14		

	A	B
1	x	f(x)
2	-0.1	-10
3	-0.01	-100
4	-0.001	-1000
5	-0.0001	-10000
6	-0.00001	-100000
7	-0.000001	-1000000
8	-0.0000001	-10000000
9	-0.00000001	-100000000
10	-1E-09	-1000000000
11	-1E-10	-10000000000
12	-1E-11	-1E+11
13		
14		



* نلاحظ، من خلال ورقة الحساب الأولى و كذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون x موجبا تماما وقريبا بالقدر الكافي من العدد 0. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما يؤول x إلى 0 بقيم أكبر و نكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$

* كما نلاحظ، من خلال ورقة الحساب الثانية و كذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $[-f(x)]$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون x سالبا تماما وقريبا بالقدر الكافي من العدد 0. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما يؤول x إلى 0 بقيم أصغر و نكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)=-\infty$

* نلاحظ أنه، لما يؤول x إلى 0، المنحني (C_f) يقترب تدريجيا من المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور التراتيب).نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيما مقاربا للمنحني (C_f).

2. نأخذ قيما مختلفة للعدد الحقيقي a.

باستعمال مجدول و راسم منحنيات أنجز ورقتي حساب مماثلة لتلك المنجزة أعلاه و التمثيل البياني (C_f) و ذلك بأخذ قيم لـ x قريبة من a.

- خمن في الحالة العامة: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$.
- حدد في الحالة العامة معادلة المستقيم المقارب للمنحني (C_f).

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$ بـ $g(x)=\dfrac{b}{x-a}$ حيث b عدد حقيقي.

خمن، حسب إشارة العدد الحقيقي b، $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} g(x)$.

نهايات الدوال التناظرية

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

ملاحظة: تسمى الدالة f دالة تناظرية.

1. المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

نتيجة1: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$

تعريف: القول عن المستقيم ذو المعادلة $y=y_0$ و الموازي لمحور الفواصل أنه مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ ($\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$).

نتيجة2: المنحني (C_f) يقبل، لما يؤول x إلى $+\infty$ و لما يؤول x إلى $-\infty$، مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=\frac{a}{c}$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{3x+1}{2x+4}$.

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{2}$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{3}{2}$.

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{3}{2}$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

نتيجة1: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} \frac{1}{x}=+\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{<}0} \frac{1}{x}=-\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}a} \frac{1}{x-a}=+\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{<}a} \frac{1}{x-a}=-\infty$

تعريف: القول عن المستقيم ذو المعادلة $x=x_0$ و الموازي لمحور التراتيب أنه مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=-\infty$

أو $\lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=-\infty$

نتيجة2: المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-\frac{d}{c}$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{x+3}$.

لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}-3} \frac{1}{x+3}=+\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{<}-3} \frac{1}{x+3}=-\infty$.

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=-3$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f.

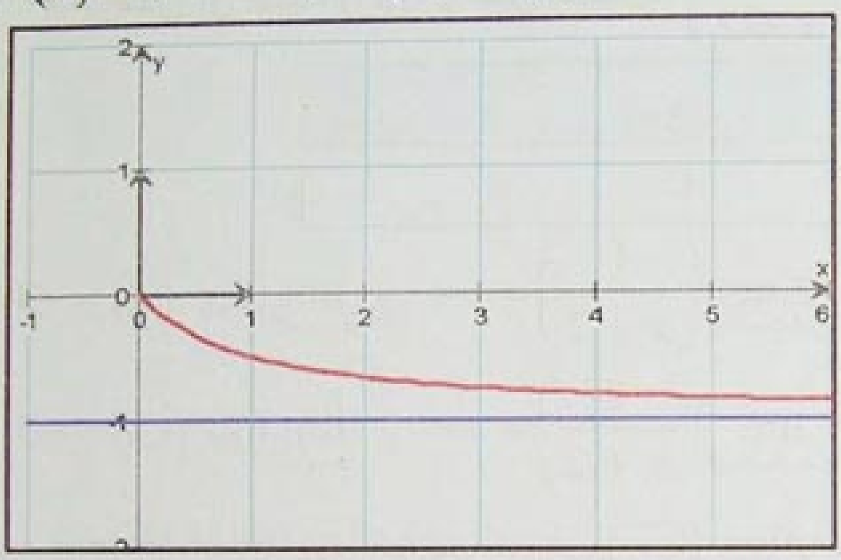
تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{-x}{x+1}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

1. أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ و المنحني (C_f).

حل:

1. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{-1}{1}=-1$. نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
2. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{-1(x+1)-1(-x)}{(x+1)^2}=\dfrac{-x-1+x}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$. لدينا كذلك $f(0)=0$.



x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 $\searrow$ -1

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1[\cup]1;3]$ بـ $f(x)=\dfrac{-4}{x-1}$ و ليكن (C_f) منحنيها.

1. أدرس نهاية الدالة f عند 1. ماذا تستنتج ؟
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المستقيم ذو المعادلة $x=1$ و المنحني (C_f).

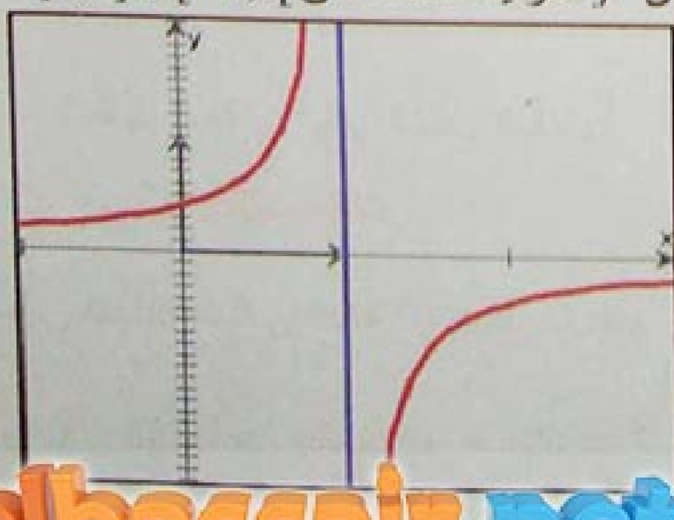
حل:

1. من أجل كل x من $[-1;1[\cup]1;3]$، $f(x)=-4\times\dfrac{1}{x-1}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ و منه بعد الضرب في العدد (-4) نحصل على:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=-\infty$. نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيما مقاربا للمنحني (C_f).

2. من أجل كل x من $[-1;1[\cup]1;3]$، $f'(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2}$. إذن f متزايدة تماما على $[-1;1[$ و $]1;3]$.



x	-1 $\qquad$	1	$\qquad$ 3
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	2 $\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$ -2

دراسة دالة تناظرية

1. دراسة مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- **النهايات:**

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{1}=2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{1}=2$.

* يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=(2x+1)\left(\frac{1}{x+2}\right)$. لندرس إشارة $x+2$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
إشارة $x+2$	$-$	0	$+$

لدينا $\lim_{x\to-2}(2x+1)=-3$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}-2}\left(\frac{1}{x+2}\right)=-\infty$ و منه $\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=+\infty$.

لدينا $\lim_{x\to-2}(2x+1)=-3$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\left(\frac{1}{x+2}\right)=+\infty$ و منه $\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty$.

- **المستقيمات المقاربة:** يقبل المنحني (C_f) مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=2$ و مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $x=-2$.

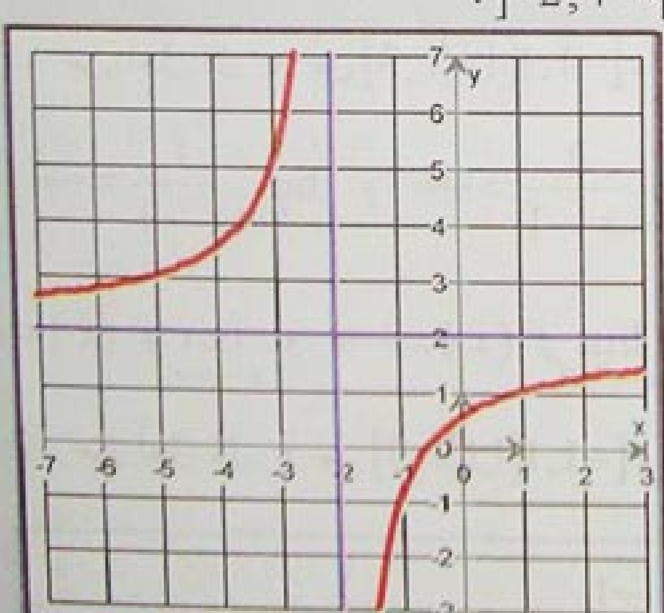
- **المشتقة:** من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$، $f'(x)=\frac{2(x+2)-1(2x+1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$.

- **إشارة المشتقة:** من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$، $f'(x)>0$.

نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$.

- **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2



- **التمثيل البياني:** انظر الشكل المقابل.

2. ملاحظات

يسمى التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq0$ و $ad-bc\neq0$ قطعا زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين $y=\frac{a}{c}$ و $x=-\frac{d}{c}$.

تمرين محلول: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\frac{2-5x}{x+1}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

1. عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f(x)=a+\frac{7}{x+1}$.
2. أدرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ ، $+\infty$ و 1. استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. أرسم المستقيمين المقاربين و المنحني (C_f).

حل:

1. لدينا مثلا من جهة $f(0)=2$ و من جهة ثانية $f(0)=a+7$ و منه $a+7=2$ أي $a=-5$.

و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f(x)=-5+\frac{7}{x+1}$.

2. * لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$.

* لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f(x)=-5+7\times\frac{1}{x+1}$. لندرس إشارة $x-1$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $x+1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$ و منه بعد الضرب في 7 و إضافة -5 نحصل على $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=-\infty$.

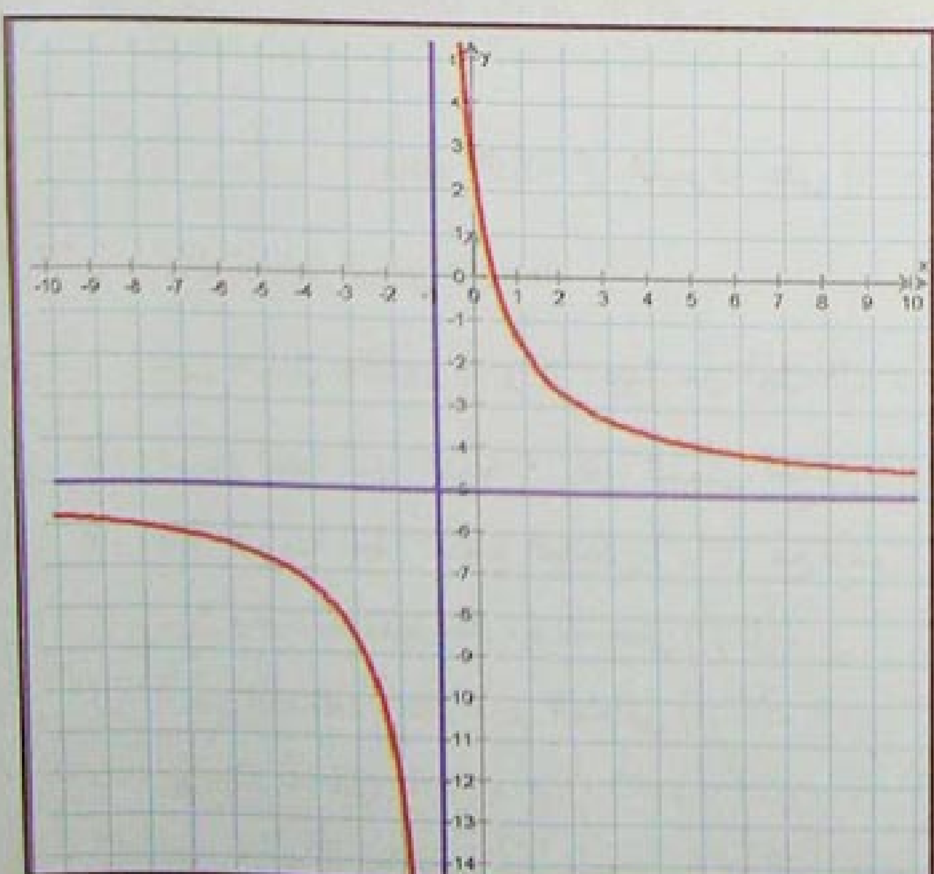
$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left(\frac{1}{x+1}\right)=+\infty$ و منه بعد الضرب في 7 و إضافة -5 نحصل على $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=+\infty$.

نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل $(x'x)$ معادلته $y=-5$ و مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب $(y'y)$ معادلته $x=-1$.

3. لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f'(x)=-\frac{7}{(x+1)^2}$.

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f'(x)<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$-5 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -5$



4. لرسم المنحني (C_f) بأكثر دقة يمكن رسم بعض النقط المساعدة كنقطة تقاطع (C_f) مع $(y'y)$ و المحصل على ترتيبها بحساب $f(0)$ و نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ و المحصل على فاصلتها بحل المعادلة $f(x)=0$.

التعرف على المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات

نعتبر فيما يلي جداول تغيرات أربع دوال f_1، f_2، f_3 و f_4:

x	0		3		$+\infty$
$f_1(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_2(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

x	1		10		$+\infty$
$f_4(x)$	3	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	5

أجب عن الأسئلة الموالية بواسطة قراءة لجداول التغيرات السابقة:

1. عين بالنسبة لكل دالة مجموعة التعريف و النهايات عند أطراف هذه المجموعة.
2. أعط تفسيرا بيانيا لكل نهاية من النهايات السابقة.
3. كيف يتم، انطلاقا من جدول التغيرات، التعرف على المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب ؟
4. كيف يتم، انطلاقا من جدول التغيرات، التعرف على المستقيمات المقاربة الموازية لمحور الفواصل ؟

المستقيم المقارب و قواسم عدد طبيعي

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. عين عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. عين فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.
4. برر وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f).
5. أرسم المستقيم المقارب و المنحني (C_f).
6. بين أنه إذا كان $x>5$ فإن $2<f(x)<3$.
7. عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة x التي يقسم العدد $x+1$ من أجلها العدد $3x-3$.

الربط بين دالة، جدول تغيرات و منحن

إليك في ما يلي ثلاث دوال، ثلاث جداول تغيرات و أربع منحنيات.
أرفق بكل دالة جدول تغيراتها و تمثيلها البياني مبررا في كل مرة اختيارك.

1. الدوال:

- الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ $f(x)=1-\dfrac{3}{x-2}$
- الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ $g(x)=2-\dfrac{1}{x-1}$
- الدالة h المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ $h(x)=\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2}{x-1}$

2. جداول التغيرات:

(1)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

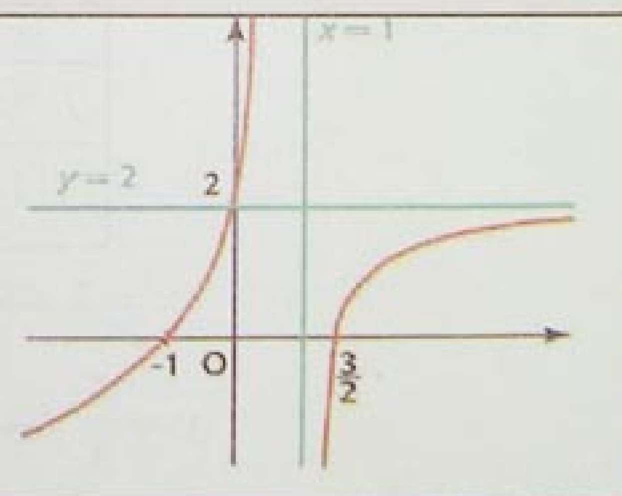
(2)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

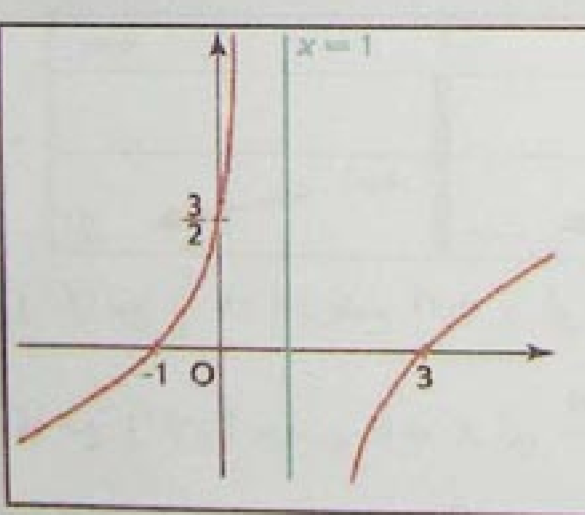
(3)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

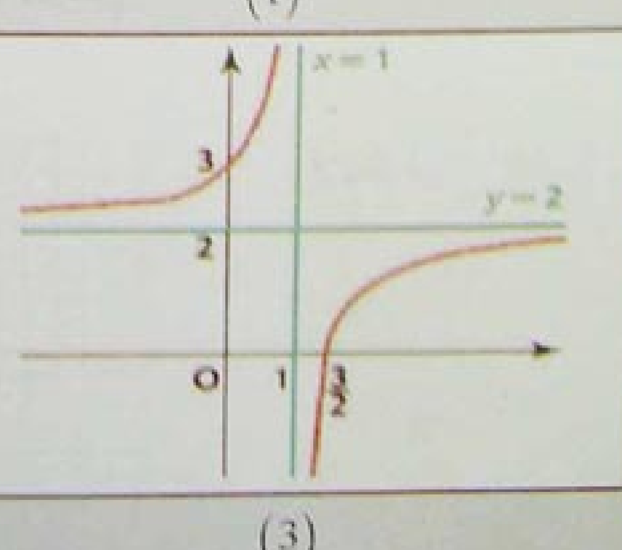
3. المنحنيات:



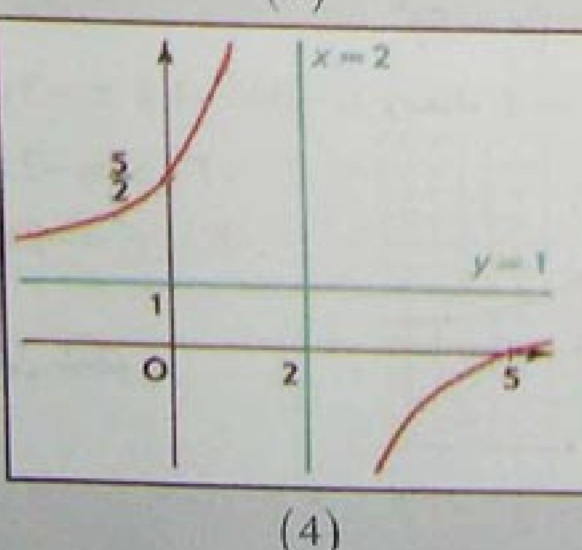
(1)



(2)



(3)



(4)

موضوع محلول

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$.

يرمز (C) للمنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ - أحسب النهايات للدالة f عند حدود مجالات التعريف .

ب - أدرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

2) أوجد نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات

3) أثبت أن المنحني (C) يقبل مماسين T و T' معامل توجيه كل منهما يساوي -2 .

عين معادلة لكل من T و T' .

4) أرسم T و T' ثم المنحني (C).

حل مختصر

1) أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=+\infty$

ب- $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-3)^2}$ ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ ، $f'(x)<0$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

2) تقاطع (C) مع (xx') بوضع $y=0$ أي $\dfrac{2x-4}{x-3}=0$ ومعناه $x=2$

تقاطع (C) مع (yy') بوضع $x=0$ أي $y=\dfrac{2\times0-4}{0-3}$ ومعناه $y=\dfrac{4}{3}$

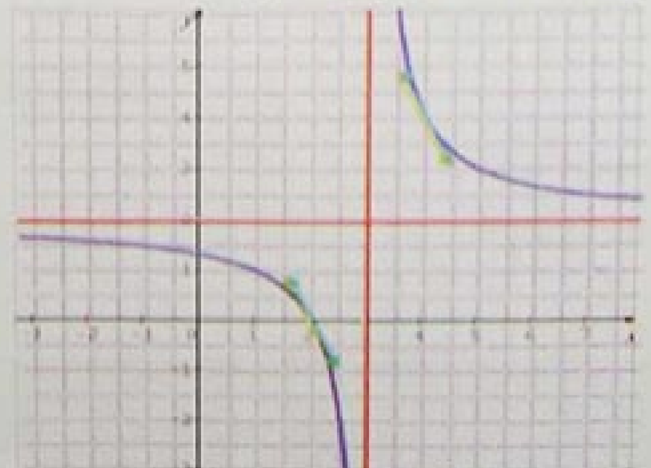
3) $f'(x)=-2$ معناه $\dfrac{-2}{(x-3)^2}=-2$ أي $(x-3)^2=1$ ويكافئ

$x-3=1$ أو $x-3=-1$ ومعناه $x=4$ أو $x=2$.

$T: y=-2x+12$

و $T': y=-2x+4$.

4) التمثيل البياني



تعاليق

لحساب النهاية 3 أدرس إشارة $x-3$.

عندما تكون المشتقة سالبة فإن الدالة تكون متناقصة .

لاحظ أن $T//T'$.

موضوع مع إرشادات

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+2}$.

يرمز (C) للمنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ - أحسب النهايتين للدالة f عند حدود مجالات التعريف .

ب - أدرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها

2. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل

3. عيّن معادلة ديكارتية للمستقيم T مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. أنشئ كلا من : T و (C).

5. بين أن المستقيم Δ الذي معادلته : $3x+y-2=0$ يقطع المنحني (C) في نقطتين يطلب تحديدهما .

إرشادات

1. أ ــ لحسب النهايات للدالة f أكتب أول مجموعة على شكل مجالات ثم عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ اعتمد على مبرهنة ؛ وعند -2 أدرس إشارة $x+2$.

ب ــ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f هو حساب الدالة المشتقة ثم دراسة إشارتها .

2. لتعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل يجب حل المعادلة $f(x)=0$.

3. تطبيق مباشر لمعادلة المماس .

5. كتابة معادلة Δ على الشكل $y=-3x+2$ ثم حل المعادلة $f(x)=-3x+2$.

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - نهايات الدوال التناظرية

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1-x}{x}$$

و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

1. أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ و المنحني (C_f).

2 f الدالة " مقلوب " معرفة على $\mathbb{R}^*$

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)$ 6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$

3 احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى a في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$; $a=-1$

2) $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$; $a=\frac{1}{2}$

3) $f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$; $a=2$

4) $f(x)=\frac{x-3}{x}$; $a=0$

5) $f(x)=\frac{2x+5}{x+2}$; $a=-2$

6) $f(x)=\frac{x+3}{x-4}$; $a=4$

4 احسب نهايات الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$ ثم إلى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ 2) $f(x)=\frac{5x-1}{2x-2}$

3) $f(x)=\frac{-2x}{1-x}$ 4) $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$

5 باستعمال النظريات العامة حول النهايات احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أكد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لمحور الفواصل.

1) $f(x)=\frac{1}{x}+1$ 2) $f(x)=\frac{2x+6}{1-2x}$

3) $f(x)=\frac{x+1}{0,5x-1}$ 4) $f(x)=\frac{1}{x+2}-3$

5) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ 6) $f(x)=\frac{-2x}{x-2}-1$

7) $f(x)=\frac{-4}{x+3}$ 8) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

9) $f(x)=\frac{0,01x}{x+2}$ 10) $f(x)=\frac{-x}{2x-1}3$

6 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أكد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لمحور الفواصل

1) $f(x)=3-\frac{1}{x-2}$ 2) $f(x)=\frac{x}{x+5}$

3) $f(x)=\frac{-10x}{10x+20}$ 4) $f(x)=-6+\frac{1}{x+3}$

5) $f(x)=\frac{-x}{2x+7}$ 6) $f(x)=\frac{2x}{1-4x}$

7 احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to1}\frac{5x+3}{2x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to3}\frac{-2x+1}{3-x}$ ،

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x-3}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+1}{2x-1}$ ،

$\lim\limits_{x\to4}\frac{5-2x}{x-4}$ ، $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x-6}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{3x-4}{2-x}$ ، $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x-4}{-x-2}$

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}}\frac{x}{4x+3}$ ، $\lim\limits_{x\to6}\frac{3x+6}{x-6}$

8 f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

أثبت أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f .

9 f دالة عددية معرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x-3}{2x-1}$$

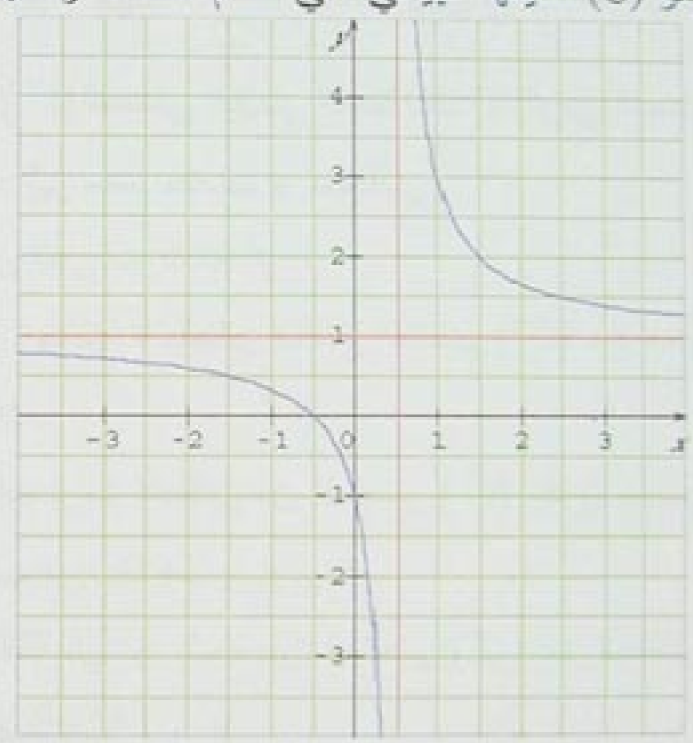
أثبت أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f.

10 f دالة عددية معرفة على $]-\infty;2[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{2-x}$$

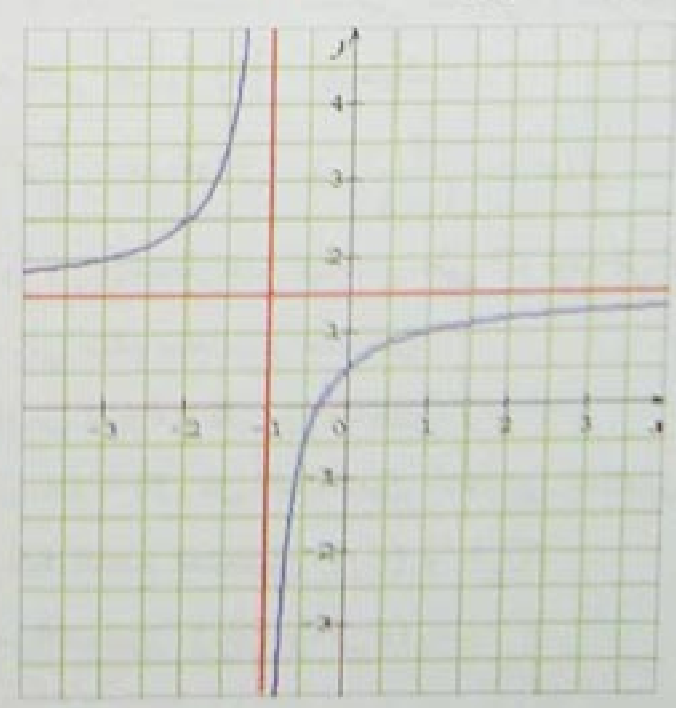
أثبت أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f.

11 f دالة تناظرية معرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ الشكل الموالي هو $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس



بقراءة بيانية عين معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني ثم شكل جدول تغيرات f

12 نفس سؤال التمرين 11



2 - دراسة دالة تناظرية

13 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و ليكن جدول تغيراتها هو الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2. أعط تفسيرا بيانيا للنهايات السابقة.

14 نفس أسئلة التمرين **13** مع الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ و ليكن جدول تغيراتها هو الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

15 بكالوريا

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ حيث : $f(x)=2-\frac{2}{x+2}$

1 ـ أ- احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ فسر النتيجة بيانيا.

ب- احسب نهاية f عند -2 . فسر النتيجة بيانيا

جـ- احسب مشتقة الدالة f و ادرس إشارتها.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f

2 ـ المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نسمي $(\mathcal{C})$ المنحني البياني الممثل للدالة f

ـ عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني $(\mathcal{C})$ مع محوري الإحداثيات.

ـ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها صفر .

ـ أنشئ المماس (Δ) والمنحني $(\mathcal{C})$.

تمارين

16 تنتج إحدى الورشات أقلاما. الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ بـ DA لصنع كمية x من الأقلام هي:

$$C_M(x)=\frac{5x+100}{x} \quad \text{حيث} \quad x>0$$

1. بين انه يمكن كتابة $C_M(x)$ على الشكل :

$$C_M(x)=a+\frac{b}{x}$$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

2. أ- أدرس نهاية C_M عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا و آخر اقتصاديا لهذه النتيجة.

ب- أدرس نهاية C_M عند0 ثم فسر النتيجة بيانيا.

3. احسب $C'_M(x)$ و ادرس إشارتها على $]0;+\infty[$.

4. شكل جدول تغيرات C_M.

5. ارسم في معلم متعامد و متجانس المنحني الممثل للدالة C_M.

17 بكالوريا

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1. أدرس تغيرات الدالة f.
2. عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات .
3. A ، B نقطتان من المنحني (C) فاصلتاهما على الترتيب 0 ، -2 . أحسب $f'(0)$ و $f'(-2)$ ، ثم استنتج أن (C) يقبل مماسين متوازيين عند النقطتين A ، B . أكتب معادلتيهما
4. أنشئ المماسين ثم أرسم (C).

18 بكالوريا

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1. أدرس تغيرات الدالة تا .عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

2. أ) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات .

ب) بين أنه توجد نقطتان من المنحني (C) يكون معامل توجيه المماس عند كل منهما يساوي -1.

جـ) عين معادلة كل من المماسين للمنحني (C) عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و 2

3. أرسم المماسين و المنحني (C) .

19 بكالوريا

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ حيث : $f(x)=\dfrac{x+1}{-x+2}$

و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1. أدرس تغيرات الدالة f .
2. عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C) مع محوري الإحداثيات.
3. بين أنه توجد نقطتان من المنحني (C) يكون معامل توجيه المماس عندهما يساوي 3.

عين معادلة كل من المماسين للمنحني (C) عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و 3 .

4. أرسم المماسين و المنحني (C)

20 بكالوريا

f و g دالتان عدديتان للمتغير الحقيقي x معرفتان على الترتيب على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث :

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2 \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ منحنياهما البيانيان على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1. أ- أدرس تغيرات كل من الدالتين f و g.

ب-عين معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحنى $(\mathcal{C}_g)$

2. عين نقط تقاطع المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$
3. أرسم المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.

21 نعتبر فيما يلي جداول تغيرات ثلاث دوال f ، g ، h

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-3

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	5

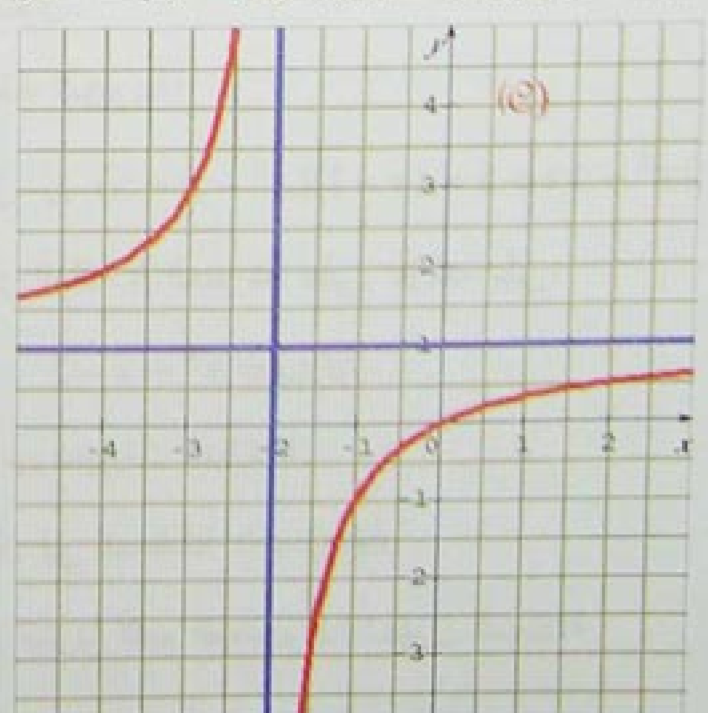
x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h(x)$	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

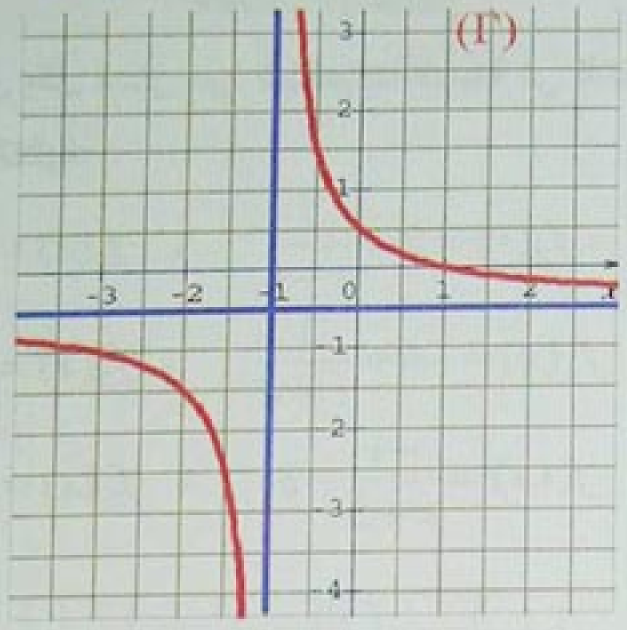
1. عين بالنسبة لكل دالة مجموعة التعريف و النهايات عند أطراف هذه المجموعة.

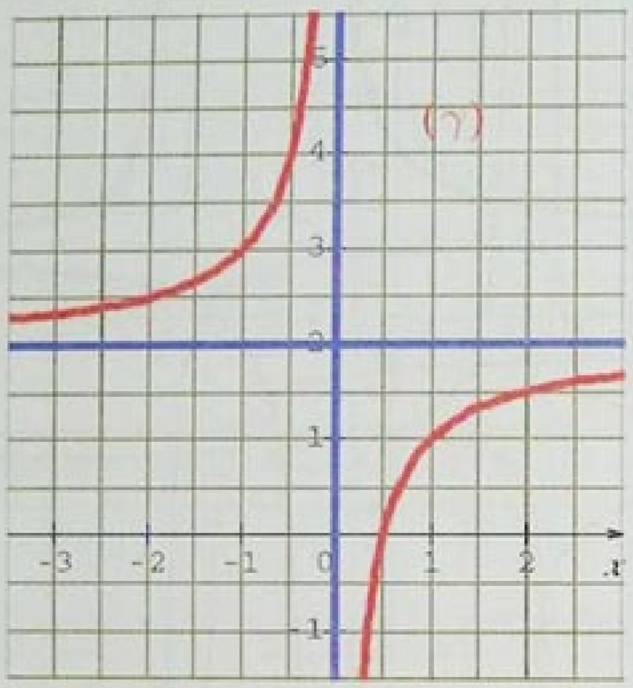
2. أعط تفسيرا بيانيا لكل نهاية من النهايات السابقة.

3. عين في كل حالة معادلة المستقيمات المقاربة لمنحنيات الدوال f ، g ، h في حالة وجودها.

22 إليك ثلاث منحنيات لثلاث دوال تناظرية و ثلاثة جداول تغيرات. أرفق بكل تمثيل جدول التغيرات الموافق له.







x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$h(x)$	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

تمارين

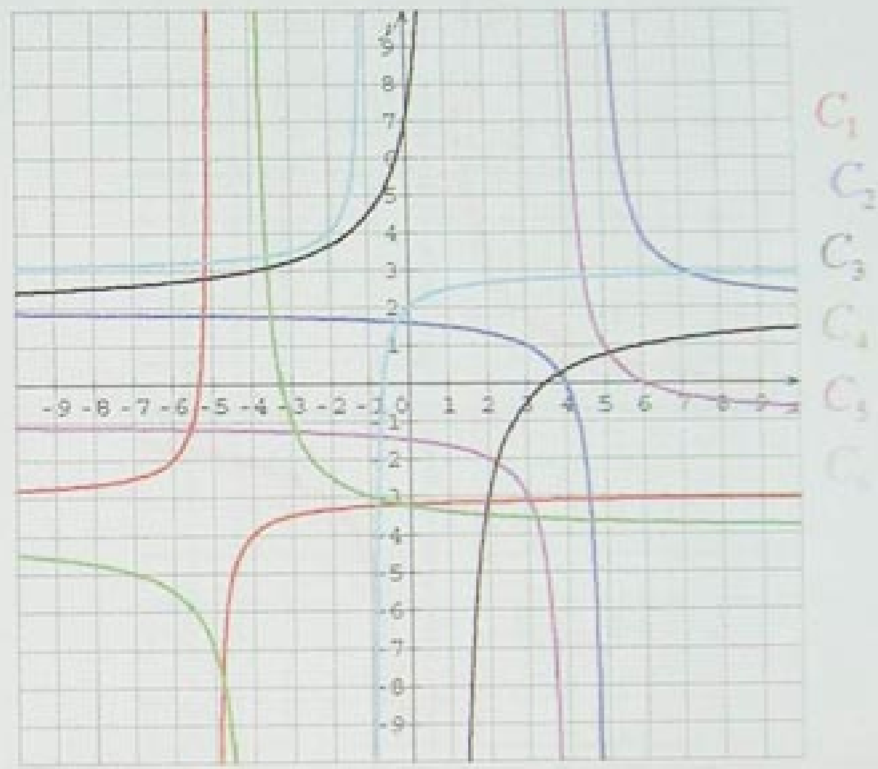
تمارين للتعمق

23 أرفق بكل منحن من المنحنيات المبينة في الشكل دالة من الدوال التالية:

$f_1(x)=3-\dfrac{1}{x+1}$ ، $f_2(x)=2-\dfrac{5}{x-1}$ ،

$f_3(x)=\dfrac{2}{x-4}-1$ ، $f_4(x)=-4+\dfrac{3}{x+4}$ ،

$f_5(x)=2+\dfrac{2}{x-5}$ ، $f_6(x)=\dfrac{-1}{x+5}-3$



24 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x-3}{-x+2}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f (النهايات و اتجاه التغير).

2. أ- عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 1.

ب- ادرس إشارة $f(x)-(x-2)$ ، فسر بيانيا النتيجة.

3. هل توجد نقط من المنحني (C) يكون عندها المماس لـ (C) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x+2$ ؟ إذا كان الجواب نعم ، عين احداثياتها.

25 **الطريقة البيانية:**

1. بين أن حل المعادلة $x^2=\dfrac{4x-5}{x-2}$ ، $(x\neq 2)$ يؤول إلى حل المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{5x-4}{x-2}$$

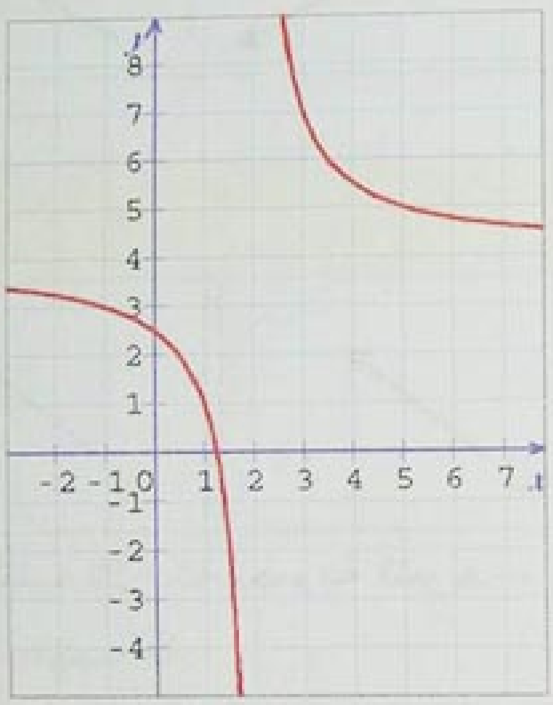
أ- اكتب $f(x)$ على الشكل $\alpha+\dfrac{\beta}{cx+d}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;2[$ ثم على المجال $]2;+\infty[$.

3. في الشكل التالي رسمنا المنحني (C) الممثل للدالة f

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2$

ارسم في نفس المعلم المنحني C_g الممثل للدالة g .



4. بقراءة بيانية عين عدد حلول المعادلة :

$$x^3-2x^2-4x+5=0$$

أعط قيمة مضبوطة إذا كان ذلك ممكنا أو قيمة مقربة لكل من الحلول.

الطريقة الجبرية:

1. تحقق أن $x^3-2x^2-4x+5=(x-1)(x^2-x-5)$

2. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=x^2-x-5$$

أ- ادرس تغيرات الدالة h.

ب- حل في المعادلة $h(x)=0$

3. عين جبريا القيم المضبوطة لحلول المعادلة

$$x^3-2x^2-4x+5=0$$

مسائل

26 سكان بلد يزدادون حسب دالة f حيث:

$$f(x)=\frac{7x+200}{x+20}$$

حيث x هو عدد السنوات الجارية منذ من نهاية سنة 1960 و $f(x)$ مقدرة بملايين السكان

1.ما هو عدد السكان في سنة 1960 ؟ في 1970 ؟

2.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

$$f(x)=\frac{60}{x+20}+7$$

3.ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

4.هل السكان في هذا البلد في تزايد أم في تراجع؟ برّر.

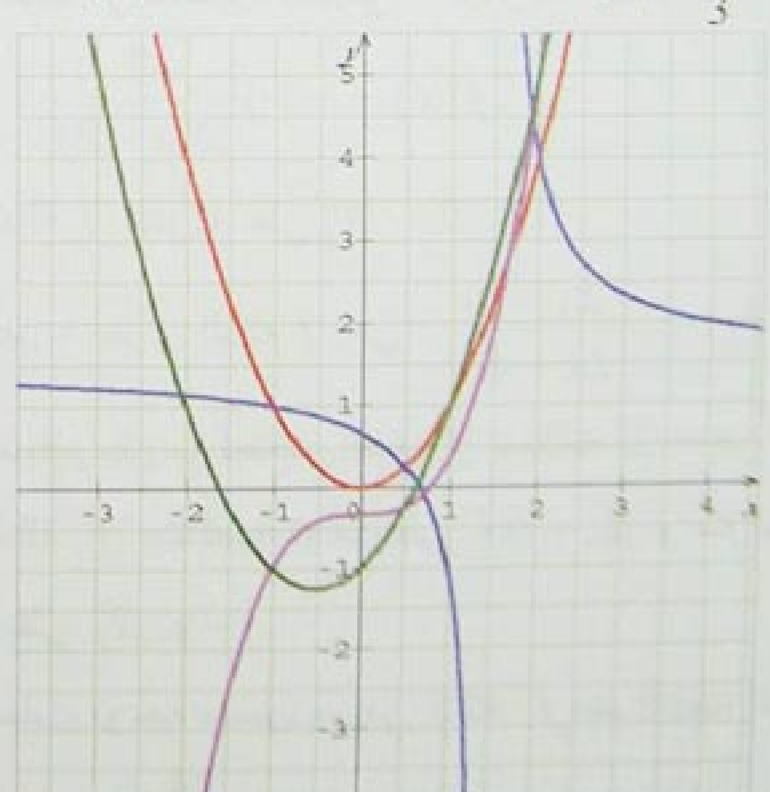
5.حل المعادلة $f(x)=8$.

6.باستعمال جدول تغيرات الدالة f ، حدّد إذا كان بعد سنة 2008 عدد السكان أكثر أو أقل من 8 ملايين نسمة.

27 في الشكل التالي مثلثنا المنحنيات C_h ، C_g ، C_f و C_k للدوال f ، g ، h و k على الترتيب المعرفة بـــ :

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=\dfrac{3x-2}{2x-3}$ ،

$h(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{3}$ و $k(x)=x^2+x-1$



I. 1.أ- أعط جدولي تغيرات الدالتين f و k .

ب- تعرّف على المنحنيين C_f و C_k في الشكل.

2.أ- احسب $h'(x)$ حيث h' مشتقة الدالة h ، شكل جدول تغيرات الدالة h .

ب- تعرّف على المنحني C_h في الشكل.

3.أ- من أجل أي قيمة لـــ x تكون الدالة g غير معرفة ؟

ب- تعرّف في الشكل على المستقيمين المقاربين للمنحني C_g .

II . نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$(E) \;.......\quad 2x^3-3x^2-3x+2=0$$

1.أ- بين أنه يمكن كتابة المعادلة (E)على الشكل:

$$f(x)=g(x)$$

ب- استنتج حلا بيانيا للمعادلة (E).

2. أ- بين أنه يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل:

$$h(x)=k(x) \,.$$

ب- استنتج حلا بيانيا للمعادلة (E).

3. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2x^2+x-1=0$.

ب- انشر : $(x-2)(2x^2+x-1)$

جـــ- استنتج حلول المعادلة (E).

28 1.ثمن بضاعة هو $120DA$.هذا الثمن عرف ارتفاعا مفاجئا بنسبة25% ثم انخفاضا بنسبة غير معروفة $y\,\%$. نعلم إذن أن ثمن البضاعة هو من جديد $120DA$. بوضع معادلة ثم حلها احسب قيمة y .

2.بصفة عامة، ثمن P لبضاعة بالدينار يعرف ارتفاعا بنسبة $x\,\%$ ثم انخفاضا بنسبة $y\,\%$.يعود إذن إلى قيمته الأصلية P .

بإعطاء تفصيل للحسابات بين أن : $y=\dfrac{100x}{x+100}$.

3. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;100]$ بـــ:

$$f(x)=\frac{100x}{x+100}$$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة: $1cm$ من أجل 5 وحدات.

أ- بين أن: $f(x)=100-\dfrac{10000}{x+100}$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f على$[0;100]$ و شكل جدول تغيراتها.

جـــ- عين معادلة المماس T للمنحني (C)عند النقطة التي فاصلتها 0.

د- ارسم T و (C).

4. نريد أن يكون $y=\dfrac{2}{3}x$.

أ- عين بالحساب قيمتي x و y .

ب- بين ، مع الشرح كيف الحصول على قيمتي x و y بيانيا ؟

اختيار من متعدد

29 لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{2-x}{x+5}$$

اختر الجواب الصحيح من ضمن الأجوبة المقترحة مع التبرير

أ- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$.

ب- الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-5[$ و $]-5;+\infty[$.

جـ- إشارة مشتقة الدالة f ثابتة.

د- منحني الدالة f لا يقطع محور الفواصل.

هـ- منحني الدالة f هو قطع مكافئ.

و-مماس منحني الدالة f عند النقطة التي فاصلتها0 هي $y=-\frac{7}{25}x+\frac{2}{5}$.

30 لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{0,5\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1-x}{x-0,5}$$

من بين الاقتراحات التالية يوجد جواب صحيح واحد على الأقل ، تعرف على الأجوبة الصحيحة مع التبرير.ب-

أ- 1- هو حل للمعادلة $f(x)=0$

ب- $f'(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{1}{2}$

جـ- مشتقة الدالة f معطاة بـ : $f(x)=\frac{0,5}{(x-0,5)^2}$

د- الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

هـ- منحني الدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته $y=-1$ كمستقيم مقارب.

و- منحني الدالة f يقبل مماسين متوازيين معامل توجيه كل منهما 2-.

صحيح أم خاطئ

31 أجب بصحيح أم خاطئ على كل مما يلي:

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{500\}$ بـ : $f(x)=\frac{x+100}{500-x}$

1- مستقيم مقارب لمنحني الدالة f معادلته $y=-1$

2- مستقيم مقارب لمنحني الدالة f معادلته $x=-500$

3- عبارة أخرى للدالة f هي :

$$f(x)=1+\frac{400}{500-x}$$

4- المستقيمان المقاربان لمنحني الدالة f يتقاطعان في النقطة التي إحداثياتها $(500;-1)$.

5- إذا كان $0<x<500$ فإن:

$$f(500)<f(x)<\frac{1}{5}$$

6- مشتقة الدالة f تنعدم مرة واحدة على الأقل.

32 أجب بصحيح أم خاطئ على كل مما يلي:

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ :

$$f(x)=-1+\frac{7}{2(x-2)}$$

1- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$

2- عبارة أخرى للدالة f هي : $f(x)=\frac{-2x+11}{2x+4}$

3- مستقيم مقارب لمنحني الدالة f معادلته $x=2$

4- الدالة f متناقصة تماما على $]2;+\infty[$ و متزايدة تماما على $]-\infty;2[$.

5- معامل توجيه مماس منحني الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1 هو $-\frac{14}{9}$.

6- إذا كان $3<x<5$ فإن $\frac{1}{6}<f(x)<\frac{5}{2}$.

7- منحني الدالة f يشمل النقطة التي إحداثياتها $\left(0;\frac{11}{4}\right)$.

6 الإحتمالات 6

الكفاءات المستهدفة

- إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة .
- قانون الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.
- الربط بين الوسط الحسابي و الأمل الرياضي و التباين التطبيقي و التباين النظري لسلسلة إحصائية .
- حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر .
- بناء شجرة الإمكانيات المرجحة .
- استعمال أشجار مرجحة للحصول على علاقة الاحتمالات الكلية .
- التحقق من استقلال حادثتين .
- بناء شجرة الإمكانيات المرجحة و استعمالها في حالة تكرار تجارب متطابقة و مستقلة

عند رمي قطعة نقود متوازنة ، الدراسة النظرية تؤكد أن للوجه حظا واحدا من بين حظين أي عند رمي قطعة نقود مرتين متتابعتين فإن الوجه سيظهر مرة واحدة وعند رمي القطعة أربعة رميات متتابعة سيظهر الوجه مرتين...هذا مادام حظ ظهور الوجه هو نفسه حظ ظهور الظهر لكن عمليا لا يمكن الجزم بهذا ، إذ يمكن في الرميات الأربعة أن لا يظهر الوجه أبدا ... !

نفس الشيء بالنسبة لحجر نرد عادي . للرقم 5 مثلا حظ من بين 6 حظوظ كي يظهر في رمية واحدة أي في ستة رميات متتابعة سيظهر الرقم 5 مرة واحدة هذا نظريا ، لكن عمليا يمكن خلال الرميات الستة المتتابعة أن لا يظهر الرقم 5 و لو مرة واحدة ...!

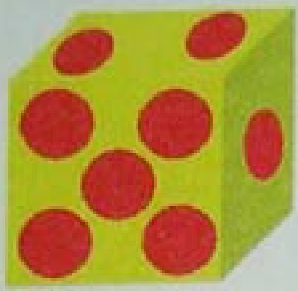
هذه الإشكاليات و غيرها تختفي كلما كان عدد الرميات أكبر و أكبر .

قال أوندري كولموغوروف (1903 – 1987)

" إن قرار الإبيستمولوجيا في علم الاحتمال يرتكز على أساس أن الظواهر العشوائية بجوار الأعداد الكبيرة و الكبيرة جدا تولّد الصرامة و الانضباط أو أن العشوائية تتلاشى بكيفية ما . "

الأنشطة

النشاط الأول



نرمي حجر نرد متوازن رمية واحدة و نسجل الرقم على الوجه العلوي .

1) ماهي القيم التي يمكن الحصول عليها ؟

2) نرمي حجر النرد هذا مرتين متتابعتين و نسجل في كل مرّة مجموع الرقمين المحصل عليهما.

- ماهي القيم الناتجة ؟

3) نرمي حجر النرد هذا الآن ثلاث رميات متتابعة و نسجل في كل مرّة مجموع الأرقام المحصل عليها.

- ماهي القيم الناتجة ؟

النشاط الثاني

يضم صندوق 5 كرات متشابهة مرقمة من 0 إلى 4 .

1) نسحب كرتين في آن واحد و نسجل مجموع رقميهما .

أ) ما هو عدد النتائج التي يمكن الحصول عليها؟

ب) بيّن أن أصغر وأكبر نتيجتين يمكن الحصول عليهما هما 1 و 7 على الترتيب .

ج) ما هي النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها ؟

2) أ) ما هو عدد الطرق للحصول على 5 ؟

ب) بين أن احتمال الحصول على 5 هو $\frac{1}{5}$ **(نسبة عدد طرق الحصول على 9 الى عدد الطرق الكلية)**

3) أكمل الجدول التالي

النتائج المحصل عليها x_i	1	....	5	...	7
احتمال كل نتيجة محصّل عليها $P(x_i)$		....	$\frac{1}{5}$	...	

4) أحسب الوسط الحسابي و التباين للتوزيع الناتج .

النشاط الثالث

حجر نرد أوجهها تحمل الأرقام التالية 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 . يرميه لاعب رميتين متتابعتين و يسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل رمية . X ، Y لاعبان . يريد X أن يكون ربحه هو مجموع الرقمين المحصل عليهما (دينار) ويريد Y أن يكون ربحه هو جداء الرقمين المحصل عليهما .

1) عرّف قانوني الاحتمال لكل من X و Y .

2) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين لكل من X و Y .

3) أي الطريقتين مربحة أكثر لصاحبها ؟

النشاط الرابع

في ثانوية ما ، 25 % من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15 % منهم مستواهم ضعيف في مادة الفلسفة و 10 % مستواهم ضعيف في المادتين معا . نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية :

1) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الفلسفة ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات أيضا ؟

2) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفلسفة أيضا ؟

3) ما إحتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات أو في مادة الفلسفة ؟

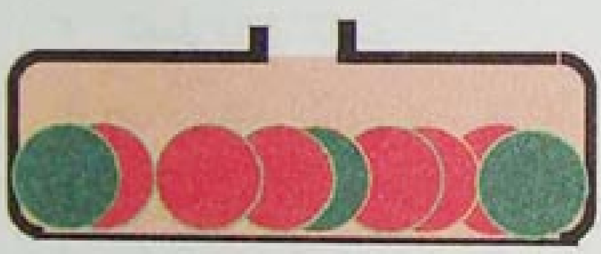
النشاط الخامس

يضم صندوق ثلاث قطع نقدية . قطعة عادية (تحمل وجه وظهر) و قطعة تحمل وجهين و القطعة الثالثة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 3/1 . نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة .

أحسب ل إحتمال الحصول على وجه . (يمكنك تشكيل شجرة الإمكانيات)

النشاط السادس

يضم صندوق 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس .



نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

لتكن الحادثة A " الكرة الأولى حمراء " و الحادثة B " الكرة الثانية خضراء "

1) أحسب $P(A)$ ،

2) أحسب $P_A(B)$ احتمال أن تكون الكرة الثانية خضراء علما أن الكرة الأولى قد سحبت حمراء

3) استنتج $P(A \cap B)$ احتمال الحصول على كرة حمراء و كرة خضراء

4) هل $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

النشاط السابع

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 . نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع .

1- أحسب إحتمال الحوادث التالية : A " الكرتان تحملان رقمين فرديين " ، B " الكرتان من نفس اللون "

C " الكرتان تحملان رقمين فرديين و من نفس اللون "

- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ (أي وقوع إحداهما يؤثر في وقوع الأخرى)

2- ما إحتمال الحوادث التالية :

D " الكرتان من لونين مختلفين "

E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "

3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما إحتمال الحادثة أن يكون رقماهما فرديين ؟

ـ محاكاة تجربة عشوائية- تذبذب العينات

▪ **تجربة عشوائية :**

نقول عن تجربة أنها عشوائية عندما لا يمكن أن نجزم بصفة قطعية نتيجتها قبل إنجازها.

ملاحظة : سنختار في كل الأنشطة ، تجارب تكون لنتائجها نفس حظوظ الظهور.

▪ **عينة :** نسمي عينة مقاسها n ، كل سلسلة إحصائية مشكلة من النتائج المتحصل عليها عند تكرار هذه التجربة n مرة وفي نفس الظروف.

▪ **المحاكاة :**

نقول أننا قمنا بمحاكاة تجربة عشوائية ، عندما نختار نموذجا لها وسندا ماديا نحققها باستعماله.

دراسة مثال (دون استعمال مجدول)

نعتبر التجربة العشوائية :

نسحب عشوائيا دون الإعادة قبل السحب الموالي ، قريصة من كيس يحتوي على 4 قريصات مرقمة من 1 إلى4.

▪ **العمل داخل القسم أو خارجه**

يكرر كل تلميذ هذه التجربة 10 مرات (كل تلميذ يتحصل عندئذ على عينة مقاسها 10) و يتمم الجدول الآتي و يمثل التواترات بيانيا.

النتائج الممكنة	1	2	3	4
التكرار				
التواتر				

▪ **العمل داخل القسم**

نفرض أن عدد تلاميذ القسم هو30.

يجمع الأستاذ نتائج تلميذين (عينة مقاسها 20) ثم نتائج ثلث القسم(عينة مقاسها 100) و أخيرا نتائج كل القسم (عينة مقاسها 300) كي يتمم مع تلاميذه الجدول التالي:

	النتائج الممكنة	1	2	3	4
العينة 20	التكرارات				
	التواترات				
العينة 100	التكرارات				
	التواترات				
العينة 300	التكرارات				
	التواترات				

يمثل الأستاذ التواترات بيانيا ثم يفتح المناقشة مثلا بالسؤال : ماذا تلاحظ بالنسبة لكل عيّنة ؟

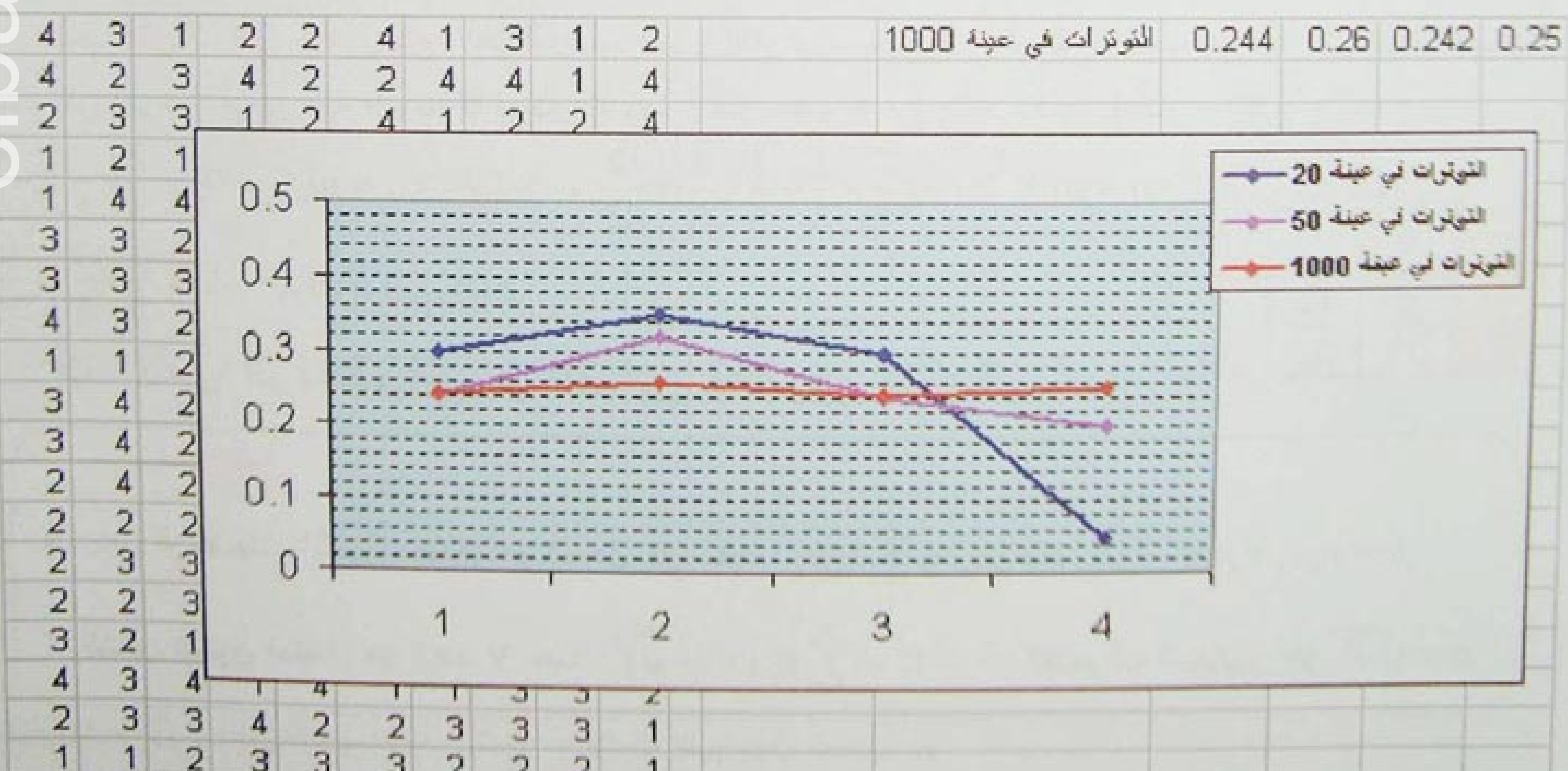
وهذا بغرض استدراج التلاميذ إلى ملاحظة:

- تغير التكرارات من عيّنة إلى أخرى
- استقرار العيّنة كلّما كبر مقاسها

محاكاة باستعمال المجدول إكسال

- أحجز أعداد عشوائية : 1 ، 2 ، 3 ، 4 بواسطة =ENT(ALEA()*4+1) من الخلية A1 إلى الخلية J150 (تحصل على 1500 عددا عشوائيا) .
- في الخلايا من N1 إلى Q1 نسجل عدد النتائج الممكنة للأعداد : 1 ، 2 ، 3 ، 4 .
- عين التوترات في عينة مقاسها 20 باستعمال =NB.SI($A$1:$J$2;N1)/20 في الخلية N2 و ثم سحب الفأرة من N2 إلى Q2.
- عين التوترات في عينة مقاسها 50 باستعمال =NB.SI($A$1:$J$5;N1)/50 في الخليةN3 و ثم سحب الفأرة منN3 إلى Q 3.
- عين التوترات في عينة مقاسها 1500 باستعمال =NB.SI($A$1:$J$150;N1)/1500 في الخليةN4 و ثم سحب الفأرة منN4 إلى Q 4.
- نحدد الخلايا من M1 إلى Q4 و نمثل التواترات بيانيا باستعمال المساعد البياني .

وأخيرا : نضغط على اللمسة F9 كي نشاهد تذبذب العينات و ملاحظة التواترات تؤول إلى وضعية استقرار (و هو سبيل ممكن للتطرق إلى مفهوم الاحتمال).



ـ قانون إحتمال لتجربة عشوائية

عند القيام بتجربة عشوائية حصلنا على n نتيجة x_1 ، x_2 ، ...... ، x_n . كرّرنا التجربة عددا كبيرا من المرّات فكانت التواترات كما يلي

x_i	x_1	.....	x_n
f_i	f_1	.....	f_n

تئول التواترات النظرية إلى احتمالات p_1 ، p_2 ، ...... ، p_n حيث $0 \le p_i \le 1$ و $\sum_i P_i = 1$

x_i	x_1	.....	x_n
p_i	p_1	.....	p_n

مثال : يضم كيس 5 كرات متماثلة ، 3 منها بيضاء (B) و الباقي سوداء(N). نسحب كرتين عشوائيا و نعتبر X عدد الكرات البيضاء المحصل عليها ، نريد تعريف قانون الاحتمال لـ X في كل من الحالات التالية :

1) **السحب المتزامن (في آن واحد)** : هنا لا يهم الترتيب و التكرار غير مسموح و عليه فعدد المخارج الكلي هو **10** ، كلها من الشكل $\{(N;N),(N;B),(B;B)\}$ و منه $p(N;N)=p(X=0)=\frac{1}{10}$

$p(N;B)=p(X=1)=\frac{6}{10}$ ، $p(B;B)=p(X=2)=\frac{3}{10}$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

2) **السحب على التوالي دون إرجاع** : هنا الترتيب مهم و التكرار غير مسموح و عليه فعدد المخارج الكلي هو **20** (لسحب الكرة الأولى دلينا **5** اختيارات و إذا ما أردنا سحب الكرة الثانية نجد أمامنا **4** اختيارات مادام الأولى لم تعاد إلى الكيس و بالتالي **20** = **4** × **5**) إذن $p(N;N)=p(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$

$p((N;B),(B;N))=p(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{12}{20}$

$p(B;B)=p(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$

3) **السحب على التوالي مع الإرجاع** : هنا الترتيب مهم و التكرار مسموح (مادام الكرة المسحوبة تعاد إلى الكيس فيمكن سحبها في المرة الثانية و عليه فأمامنا **5** اختيارات كلما أردنا سحب كرة و بالتالي فعدد المخارج الكلي **25** = 5×5)

$p(N;N)=p(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$ ، $p((N;B),(B;N))=p(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$

$p(B;B)=p(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{20}$

الأمل الرياضياتي و التباين لقانون احتمال

تعريف

- **الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل** μ **حيث** $\mu = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$
- **التباين لقانون احتمال هو العدد V حيث** $V = \sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - \mu)^2$ ، **الانحراف المعياري هو** $\sigma = \sqrt{V}$

ملاحظات : ① كما في الإحصاء يميز العدد V تشتت القيم حول المعدل μ

② يمكن حساب V بالدستور $V = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \mu^2$

خواص : ❶ عند إضافة عدد ثابت a لكل القيم x_i يضاف a إلى الأمل الرياضياتي .

تمرين محلول 1 :

يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرية إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

2) نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة . ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

– ما احتمال الحادثة A " الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "

حل : 1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات ، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية و من أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد) و بالتالي هناك $5\times5\times5=125$ عددا ممكنا

2) في الحالة الثانية هناك $5\times4\times3=60$ عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى ، الكرية المسحوبة لا ترجع)

– المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي $4\times3=12$ حالة ملائمة و بالتالي

تمرين محلول 2 :

يدفع لاعبان A و B ، 6 و 10 دينارا على الترتيب و يرمي منظم اللعبة حجري نرد متوازنين كل منهما ذو أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4 و يدفع للاعبين ضعف مجموع رقمي الوجهين الظاهرين بعد الرمي

– أحسب أمل الربح لكل لاعب .

حل : عند رمي الحجرين مجموعة النتائج الممكنة هي $S=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

باعتبار أن النتيجة هي مجموع الرقمين الظاهرين

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

يدفع اللاعب A ستة دنانير و يأخذ ضعف النتيجة و بالتالي

قيم الربح هي $E'=\{-2,0,2,4,6,8,10\}$

قانون الاحتمال يعطى بالجدول التالي

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

و $\sum_{i=1}^{7} p_i=1$

الأمل الرياضياتي هو :

$$\mu=\frac{1}{16}\times(-2)+\frac{2}{16}\times(0)+\frac{3}{16}\times(2)+\frac{4}{16}\times(4)+\frac{3}{16}\times(6)+\frac{2}{16}\times(8)+\frac{1}{16}\times(10)=\frac{64}{16}=4$$

إذن أمل الربح بالنسبة للاعب A هو 4 دينارا .

لحساب أمل الربح للاعب B نطرح 4 من كل القيم x_i للاعب A و بالتالي أمل ربحه $\mu'=\mu-4=0$ **بالنسبة للاعب B اللعبة عادلة (لا له و لا عليه)**

الدرس

ـ الإحتمالات الشرطية :

1. تعريف

لتكن A حادثة من مجموع المخارج Ω حيث $p(A) \neq 0$. نعرّف على Ω احتمالا جديدا يرمز له بالرمز p_A

حيث من أجل كل حادثة B نكتب $$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

p_A يسمى الاحتمال الشرطي علما أن A محققة

$p_A(B)=p(B/A)$ و تقرأ " إحتمال B علما أن A محققة "

<u>مثال:</u> صندوق يحوي 5 قريصات مرقمة بالأرقام 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 و 3 قريصات مرقمة بالأرقام 1 ، 3 ، 5 لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع قريصتين من الصندوق

– ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين ؟

<u>الحل:</u>

نسمي A الحادثة " **القريصة المسحوبة الأولى تحمل رقما زوجيا** " و B الحادثة " **القريصة الثانية تحمل رقما فرديا** "

واضح أن $p(A)=\frac{5}{8}$ و نريد حساب $p(A\cap B)$ أي $p(A)\times p(B/A)$ حسب التعريف

لكن $p(B/A)$ هو احتمال سحب رقما زوجيا من الصندوق الذي لا يحوي إلا أربعة أرقام زوجية من بين 7 أرقام

أي $$p(B/A)=\frac{4}{7}$$

و بالتالي $$p(A\cap B)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$$

شجرة الإمكانيات :

<u>مثال:</u>

يضم صندوق قطعتي نقد .

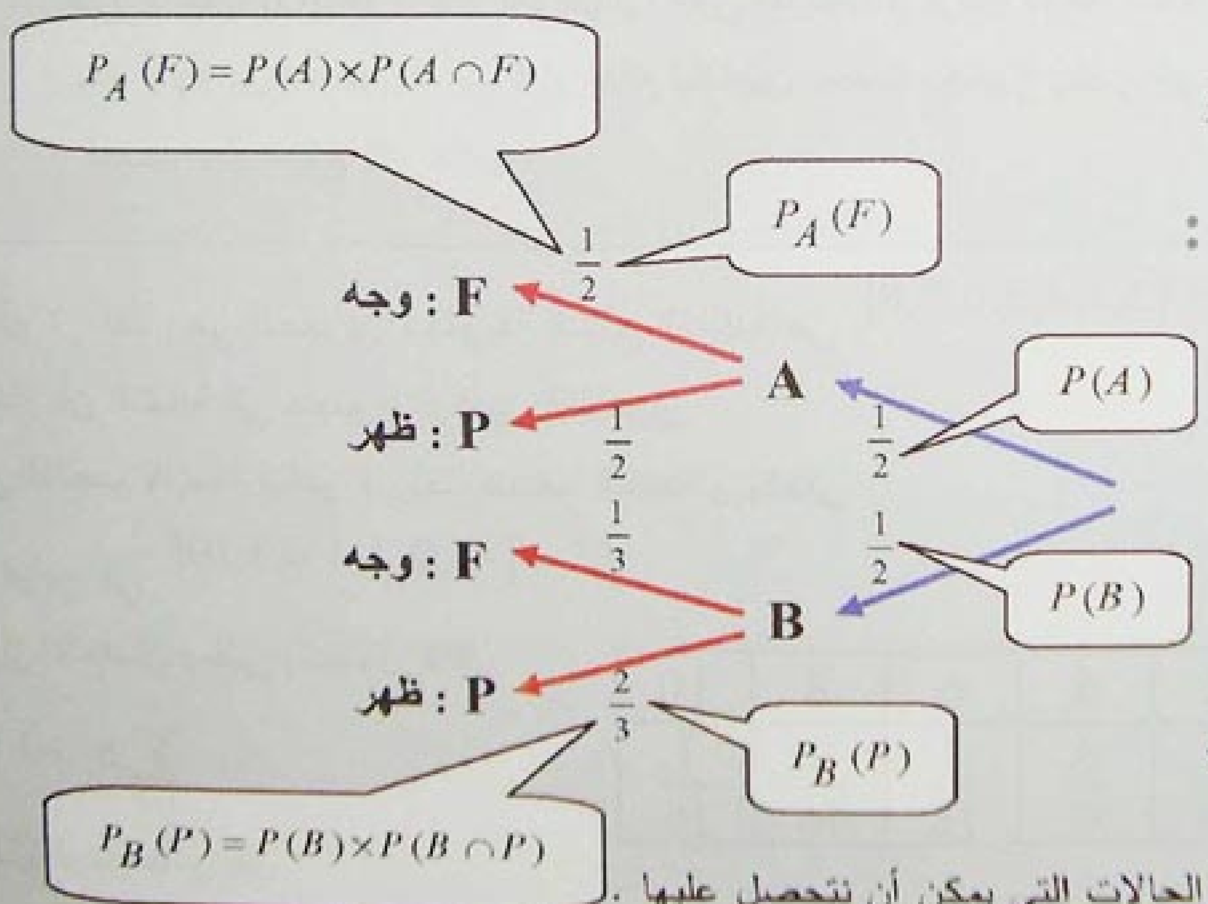
– قطعة A عادية (تحمل وجه وظهر)

– القطعة B فمغشوشة

بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 3/1 .

نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق

و نرميها مرة واحدة .



– **المطلوب** : انجاز مخطط يوضح جميع الحالات التي يمكن أن نتحصل عليها .

باعتبار الحوادث **A " رمي القطعة A " ، B " رمي القطعة B " ، F " الحصول على وجه " ، P " الحصول علة ظهر "**

$p(A)$ يعني احتمال رمي القطعة A أما $p(F)$: احتمال الحصول على وجه ، $p(P)$: احتمال الحصول على وظهر

تمرين محلول 1 :

(A) ، (B) ، (C) ثلاثة صناديق حيث :

الصندوق (A) يضم 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء

الصندوق (B) يضم كريتين حمراوين و كرية سوداء

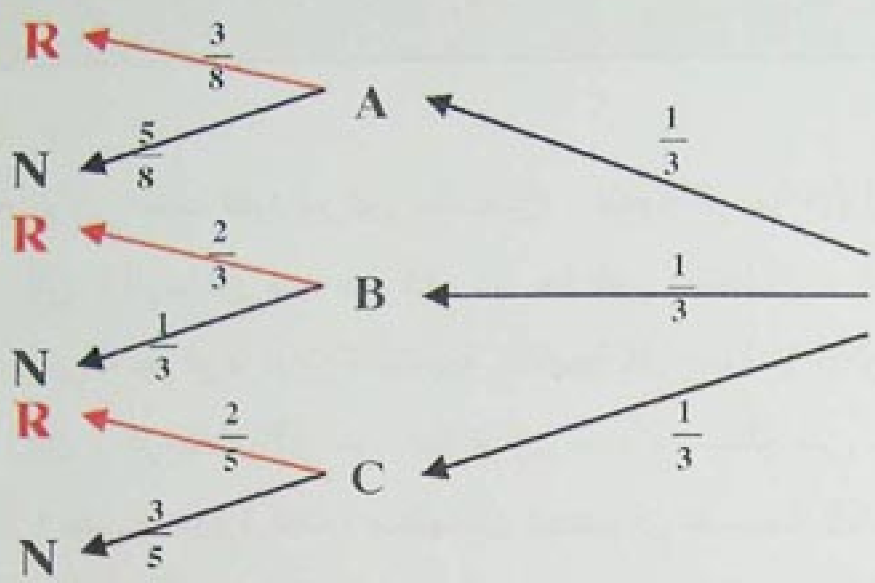
الصندوق (C) يضم كريتين حمراوين و 3 كريات سوداء

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق و نسحب منه عشوائيا كرية واحدة .

إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فما هو إحتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق (A) ؟

حل

نرمز للكرية الحمراء بالرمز **R** و الكرية السوداء بالرمز **N** و ننشئ المخطط (الشجرة أو العنكبوتية) التالي :



إحتمال أن نكون قد أخذنا الصندوق (A)

و سحبنا منه كرية حمراء هو : $P(A\cap R)$

$$P(A\cap R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

و هناك ثلاثة مسارات تودي إلى كرية حمراء :

$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{173}{360}$$

$$p_R(A)=\frac{p(A\cap R)}{p(R)}=\frac{1}{8}\div\frac{173}{360}=\frac{173}{45}$$

تمرين محلول 2 :

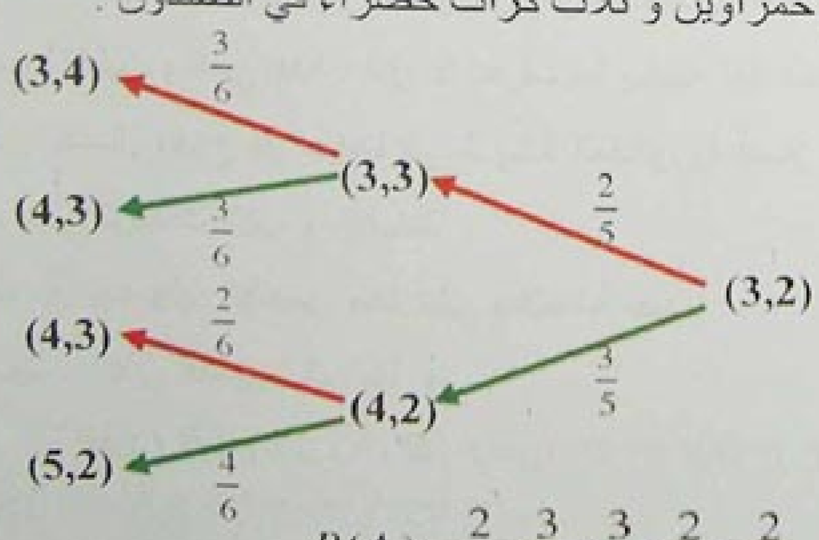
يضم صندوق كرتين حمراوين و ثلاث كرات خضراء . نسحب عشوائيا كرة واحدة . إذا كانت بيضاء ، نعيدها الى الصندوق و نضيف كرة بيضاء أخرى و إذا كانت سوداء نعيدها إلى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نعيد عملية السحب مرة ثانية . أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A " يوجد ثلاث كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "

B " يوجد خمس كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "

حل

نمثل محتويات الصندوق بالثنائية (3 ، 2) التي تعني وجود كرتين حمراوين و ثلاث كرات خضراء في الصندوق .



إحتمال سحب كرة حمراء في السحبة الأولى هو $\frac{2}{5}$.

قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (3 ، 3) .

إحتمال سحب كرة خضراء في السحبة الأولى هو $\frac{3}{5}$.

قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (4 ، 2) .

نلخص العملية بالمخطط المقابل :

إذن (باستعمال المسارات المودية إلى الثنائية (3 ، 4) ينتج $P(A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{5}$

و بنفس الطريقة نجد : $P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$

ـ الحوادث المستقلة

تعريف

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا و فقط إذا كان

$$p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$$

إذا كان $p(A) \neq 0$ فإن $p(B/A) = p(B)$

نتيجة : الحادثتان المستقلتان هما اللتان يكون وقوع إحداهما أو عدمه غير مؤثر في الأخرى .

مثال 1 :

- نرمي قطعة نقود مرتين متتابعتين . نتيجة الرمية الأولى لا تؤثر بحال من الأحوال في نتيجة الرمية الثانية
إذن : الرميتان هما عبارتان عن حادثتين مستقلتين .
- رمي حجر نرد n مرّة متتابعة . نتيجة كل رمية لا تتأثر بحال من الأحوال بالرميات الأخرى
إذن : الرميات كلها هي عبارة عن حادث مستقلة مثنى مثنى .

مثال 2 : لبنى و مروة أختان مجتهدتان تحضران نفسيهما لامتحان شهادة البكالوريا بكل جد .

قال الأستاذ لأبيهما لا شك أنهما ستنجحان في امتحان شهادة البكالوريا – إن شاء الله – إلا أن احتمال حصول لبنى على ملاحظة جيد هو 0,9 أما مروة فهو 0,5 .

نعتبر الحدثتين L " تحصل لبنى على ملاحظة جيد " ، M " تحصل مروة على ملاحظة جيد "

1) إحتمال حصول الأختين معا على ملاحظة جيد .

هو : بما أن الحادثتين L و M مستقلتان فإن $p(L\cap M) = p(L)\times p(M) = 0{,}9\times 0{,}5 = 0{,}45$

2) إحتمال حصول إحدى الأختين فقط على ملاحظة جيد .

هو : $p\left[(L\cap \overline{M})\cup(\overline{L}\cap M)\right] = p(L)\times p(\overline{M}) + p(\overline{L})\times p(M) = 0{,}9\times 0{,}5 + 0{,}1\times 0{,}5 = 0{,}50$

لأن استقلال الحادثتين L و M يؤدي إلى استقلال الحادثتين $(\overline{L}\cap M)$ ، $(L\cap \overline{M})$.

3) أب الأختين واقعي جدا ، قال لا نعرف ما يخبئه لنا الغد ،

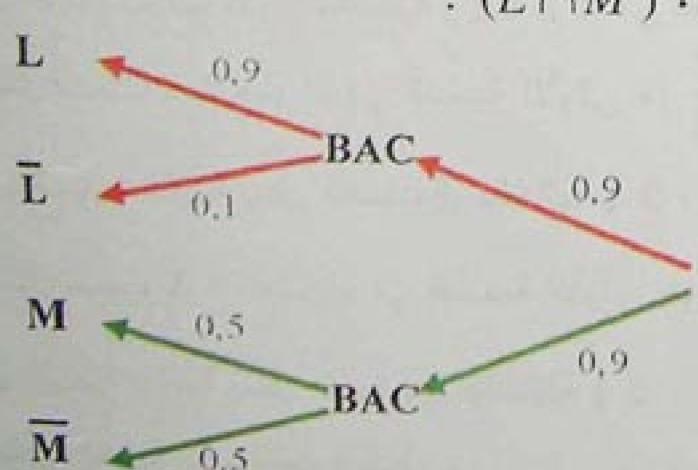
فليكن احتمال نجاح كل منهما في شهادة البكالوريا أصلا هو 0,9 .

بناء على توقعات الأب و الأستاذ ،

- إحتمال حصول الأختين معا على ملاحظة جيد :

و اعتمادا على الشجرة المقابلة هو

$$p\left[(B\cap L)\cap(B\cap M)\right] = p(B\cap L)\times p(B\cap M)$$
$$= 0{,}9\times 0{,}9\times 0{,}9\times 0{,}5 = 0{,}3645$$



الأخضر : مروة

الأحمر : لبنى

تمرين محلول 1 : يضم كيس أربع كرات بيضاء و ثمان كرات حمراء .

1- نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع . هل الحادثتان B_1 و B_2 مستقلتان ؟

"B_1" " الكرة الأولى بيضاء " ، "B_2" " الكرة الثانية بيضاء "

2- نسحب الآن عشوائيا كرتين على التوالي مع الإرجاع . هل الحادثتان B_1 و B_2 مستقلتان ؟

حل

1) $p(B_1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{44}{132}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_1\cap B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$

بما أن $\frac{1}{11}\neq\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ فإن الحادثتين B_1 و B_2 غير مستقلتين

2) $p(B_1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{48}{144}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_1\cap B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{1}{9}$

بما أن $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ فإن الحادثتين B_1 و B_2 مستقلتان

تمرين محلول 2 :

يضم كيس ثلاث كرات بيضاء و كراتين حمراوين .

نسحب عشوائيا عددا من الكرات على التوالي دون إرجاع .

نعتبر الحوادث التالية : **M** " الكرتان مختلفتا اللون " ، **N** " كرة على الأكثر حمراء "

1) إذا كان عدد الكرات المسحوبة اثنتين ، هل الحادثتان M و N مستقلتان ؟

2) إذا كان عدد الكرات المسحوبة ثلاثة ، هل الحادثتان M و N مستقلتان ؟

حل

1) نرمز للكرة البيضاء بالرمز B و للكرة الحمراء بالرمز R

مجموعة المخارج الممكنة هي :

$$E=\{(B,B);(B,R);(R,B);(R,R)\}$$

نفرض أن القانون المعرف على E متساوي الاحتمال ، لدينا عندئذ

$p(M)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، $p(N)=\frac{3}{4}$ و منه $p(M)\times p(N)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

و لدينا $M\cap N=\{(B,R);(R,B)\}$ إذن $p(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

و منه الحادثتان M و N غير مستقلتين

2) مجموعة النتائج هي :

$$E=\{(B,B,B);(B,B,R);(B,R,B);(R,B,B);(B,R,R);(R,B,R);(R,R,B);(R,R,R)\}$$

$p(M)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ، $p(N)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ و منه $p(M)\times p(N)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

و لدينا $M\cap N=\{(B,B,R);(B,R,B);(R,B,B)\}$ إذن $p(M\cap N)=\frac{3}{8}$

و منه الحادثتان M و N مستقلتان

في امتحان شفهي لدخول أحد المعاهد . وضع 20 سؤال داخل صندوق في أوراق مطوية متماثلة . 6 في مادة العلوم الطبيعية، 5 في مادة الرياضيات، 4 في مادة الفيزياء، 3 في مادة الأدب العربي و سؤالان في مادة الاجتماعيات.

I) يطلب من المترشح الأول أن يسحب ورقة واحدة يجيب عما بداخلها ثم يتركها خارج الصندوق و يسحب ورقة ثانية يجيب عن ما بداخلها ثم يسحب ورقة ثالثة دون أن يعيد الثانية إلى الصندوق .

1- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين حول الرياضيات و سؤال في مادة الفيزياء بهذا الترتيب ؟

2- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين حول الرياضيات و سؤال في مادة الفيزياء ؟

3- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في سؤال حول الأدب العربي على الأقل ؟

4- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في مواد علمية ؟

II) المترشح الثاني طلب منه إتباع نفس طريقة المترشح الأول في سحب الأسئلة لكن سمح له بإعادة الورقة بعد طيّها الى الصندوق كلما أجاب عما بداخلها . ما إحتمال أن يمتحن المترشح :

1- في مادة الاجتماعيات فقط ؟

2- في 3 أسئلة من نفس المادة ؟

3- في نفس السؤال مرتين مختلفتين ؟

4- في نفس السؤال ثلاث مرات ؟

III) يطلب من المترشح الثالث الذي يعرف الإجابة عن أسئلة الرياضيات و الفيزياء و الأدب العربي فقط سحب سؤال واحد فإذا أجاب عنه إجابة صحيحة يسمح له بسحب السؤال الثاني و إذا أجاب عن السؤال الثالث يسمح له بسحب السؤال الثالث و الأخير.

1- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في 3 أسئلة ؟

2- ما إحتمال أن يحصل هذا المترشح على علامة 10 بناءا على سلم التنقيط السابق ؟

3-إذا علمت أن المترشح قد أمتحن في ثلاثة أسئلة علمية . ما إحتمال حصوله على علامة 8 ؟

4- نعتبر X العلامة النهائية التي يتحصل عليها هذا المترشح .

أ) عرف قانون الاحتمال على X .

ب) أحسب أمله الرياضياتي .

ج) هل التنقيط في صالح المترشح ؟

(A) ، (B) راميا قوس ، كل منهما يسدّد أسهمه نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق (I – II – III) .

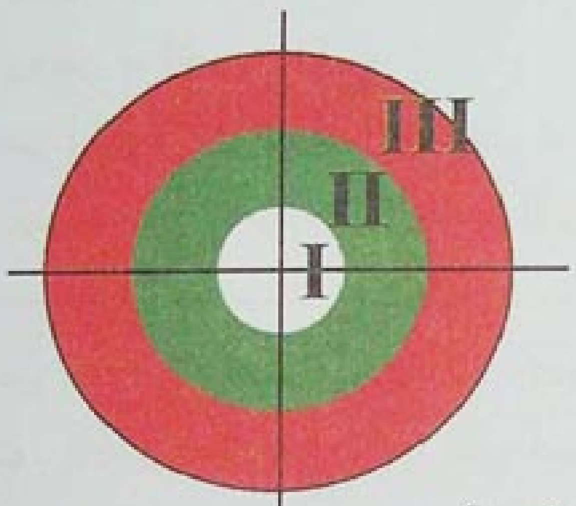
الراميان ماهران بحيث يصيبان الهدف في كل رمية

لكنهما يتفاوتان في دقّة التسديد .

إذ أن احتمالات إصابة كل منطقة من قبل كل رامي هي :

x_i	I	II	III
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$

y_i	I	II	III
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$



1) الرامي (A) يسدد ثلاثة أسهم متتابعة :

أ- ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة III ؟

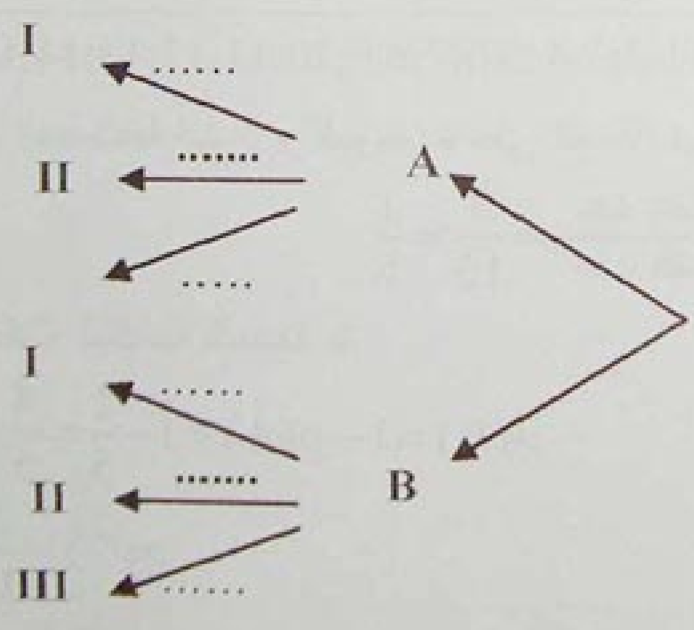
ب- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III بهذا الترتيب ؟

جـ- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III ؟

2) في مسابقة بينهما . نرمي قطعة نقود عادية لتحديد الذي يبدأ أولا في التسديد . إذا ظهر الوجه يبدأ الرامي A و إلا يبدأ الرامي B .

أ) نرمز بـ F لوجه قطعة النقود و بـ P للظهر

– أكمل الشجرة (العنكبوتية)



إصابة المناطق

ب) في حالة تسديد رمية واحدة . ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III ؟

ج) علما أن رمية واحدة قد سُدّدت و أصابت المنطقة III . ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي (أ) ؟

3) قبل انطلاق المسابقة ، انضم رام بارع C احتمالات إصابته للمناطق I – II – III على الترتيب هي $\frac{7}{10}, \frac{3}{10}, 0$

تقرر على إثر ذلك إعادة ترتيب المتسابقين بإجراء قرعة عادلة بينهم .

– أعد في الظروف الحالية الإجابة عن الأسئلة الثلاثة من الفرع (2) من هذا التمرين

موضوع محلول

في إحدى حدائق التسلية توجد عجلة كبيرة مقسمة إلى مناطق مرقمة و ملونة كما هو مبين في الشكل المقابل .يقوم المشرف على هذه اللعبة بتدوير العجلة التي تتوقف بعد عدة ثواني و يعلن عن الرقم الفائز المحدد بالسهم .

1) أحسب احتمالات الحوادث التالية :

A " **الرقم الفائز مضاعف لـــ 5** "

B " **الرقم الفائز ليس مضاعفا لـــ 5** "

C " **الرقم الفائز زوجي و أقل من 11** "

2) هذه اللعبة تقتضي أن يدفع كل لاعب 10 دنانير ثم يختار رقما واحد

– إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **أزرقا** يربح اللاعب 100 DA

– إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **بنيا** يربح اللاعب 50 DA

– إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **أخضرا** يربح اللاعب 10 DA

– إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **أصفرا** لا يربح اللاعب أي شيء .

نعتبر X الربح الحقيقي الذي يجنيه كل لاعب يجرب حظه

– عرّف قانون الاحتمال للربح الحقيقي X و احسب أمله الرياضياتي . هل هذه اللعبة عادلة ؟

حل مختصر

1) لدينا $E=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$

عدد الأرقام المضاعفة لـــ 5 و الموجودة على العجلة هو 3

و منه $p(A)=\dfrac{\text{A عدد عناصر}}{\text{E عدد عناصر}}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$

B هي الحادثة العكسية للحادثة A

ومنه $p(B)=1-p(A)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

$p(C)=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$

(2

x_i	-10	0	$+40$	$+90$
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$E(X)=(-10)\times\frac{7}{15}+0\times\frac{4}{15}+40\times\frac{2}{15}+90\times\frac{2}{15}=\frac{190}{15}=\frac{38}{3}$$

➤ و بالتالي اللعبة غير عادلة .

تعاليق

☜ يفضل تصنيف عناصر E حسب ما تمليه الحادثة " حسب الأرقام أو حسب الألوان " و ذلك باستعمال شجرة عادية

3 أرقام مضاعفة لـ 5

12 رقما غير مضاعف لـ 5

☜ يمكن حساب $p(B)$ مباشرة ولكن يفضل الاستفادة مما سبق

☜ ينبغي أولى معرفة الربح الحقيقي الممكن تحقيقه (قيم X)

☜ تكون اللعبة عادلة إذا كان الأمل الرياضياتي معدوما

موضوع مع إرشادات

يريد تلميذ حل معادلات من الدرجة الثانية فيبدأ بحساب المميز Δ .

إذا علمت أن إحتمال أن يكون مميز المعادلة الأولى سالب هو $\frac{1}{8}$. نفرض صحة الشرطين التاليين :

- إحتمال أن يكون مميز معادلة ما سالب بشرط أن يكون مميز المعادلة السابقة سالب هو $\frac{1}{20}$.

- إحتمال أن يكون مميز معادلة ما سالب بشرط أن يكون مميز المعادلة السابقة موجب أو معدوم هو $\frac{1}{20}$.

1- إذا كان التلميذ يريد حل معادلتين فقط (الأولى و الثانية) .

أ- أكمل الشجرة (العنكبوتية) التالية

$0 \leq \Delta \xleftarrow{\text{......}}$
- $\xleftarrow{\text{......}}$ ......
- $\xleftarrow{\text{.....}}$ $0 > \Delta$

$0 > \Delta \xleftarrow{8/1}$
- $\xleftarrow{\text{......}}$ ......
- $\xleftarrow{\text{......}}$ .....

المعادلة الثانية المعادلة الأولى

ب) ليكن X عدد المعادلات التي تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

- عرف قانون الاحتمال لـــ X

ج) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين .

2- إذا كان يريد التلميذ حل ثلاث معادلات فقط (الأولى ، الثانية و الثالثة)

أ) ما إحتمال أن يكون مميز المعادلة الثالثة سالبا؟

ب) ما إحتمال أن تكون المعادلات الثلاثة لا تقبل حلولا حقيقية ؟

إرشادات

1) أ) تملأ الشجرة بالاحتمالات المناسبة للتفريعات و باعتماد المعلومة و المعلومة العكسية ثم الشرطين بعد ذلك .

ب) المعادلات التي تقبل حلولا هي التي مميزها موجب أو معدوم.

2) تضاف للشجرة السابقة تفريعات للمعادلة الثالثة

- تحدد جميع المسارات المودية للحادثة
- حساب جداء الأعداد الموجود على كل مسار مؤدي لها
- إحتمال حادثة ما هو مجموع الأعداد الناتجة عن كل مسار

تمارين

تمارين تطبيقية

1- الإحتمال و قانون الاحتمال

1 في كل حالة مما ياتي أكمل قانون الإحتمال و احسب الامل الرياضياتي و التباين دون استعمالا لحاسبة

x_i	-5	0	2	7
P_i	0,3		0,2	0,3

x_i	10	30	40	80	100
P_i	0,5	0,2	0,15	0,1	

x_i	-6	-2	0	1	2	10
P_i	0,4	0,2		0,1	0,1	0,05

2 نرمي حجري نرد متوازنيين ، احدهما مكعبا أوجهه تحمل الأرقام من 1 الى 6 و الآخر رباعي وجوه أوجهه تحمل الارقام من 1 الى 4

عرّف قانون الإحتمال لرقم آحاد جداء الرقمين الناتجين و أحسب امله الرياضياتي

3 يضم كيس 10 قريصات مرقمة من 0 الى 9 .

3 منها بيضاء و الباقي سوداء

نسحب قريصة واحدة . ما احتمال الحصول على

1) قريصة تحمل رقما فرديا ؟

2) قريصة بيضاء ؟

3) نسحب الآن قريصتان على التوالي دون إرجاع .

أ) ما احتمال الحصول على رقمين فرديين ؟

ب) ما احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون ؟

ج) نعتبر X عدد القريصات البيضاء المسحوبة ، عرّف قانون احتمال لــ X و احسب أمله الرياضي

4 نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتابعة

1) حدد مجموعة المخارج .

2) كوّن الشجرة المناسبة

3) ما احتمال أن يظهر في الرمية الثالثة وجه ؟

5 نرمي حجر نرد عادية مرتين متتابعتين . ما احتمال الحصول على :

1) رقمي فرديين ؟

2) عددين مجموعهما فردي ؟

3) عددين جداؤ هما زوجي ؟

4) عرّف قانون احتمال لعدد الأرقام الفردية الظاهرة في الرميتن و احسب التباين

6 نرمي قطعة نقود متوازنة 6 مرات متتابعة .

ما احتمال أن يكون عدد مرات ظهور الوجه :

1) يساوي عدد مرات ظهور الظهر ؟

2) أكبر من عدد مرات ظهور الظهر ؟

3) مضاعف لعدد مرات ظهور الظهر ؟

4) ما ذا نقول عن قانوني احتمال لكل من عدد مرات ظهور الوجه و عدد مرات ظهور الظهر؟

7 نضع بين يدي طفل ثلاثة أقلام ملونة أخضر ، أحمر و أصفر و نطلب منه تلوين الأوجه الستة لعلبة مكعبة الشكل . ما عدد الكيفيات الممكنة للتلوين ؟

8 دفع لاعب x DA و أخذ حجري نرد عاديين و رماهما .إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين هو 7 ، يربح 20DA و إلا لا يربح أي شيئ .

كم يجب على اللاعب أن يدفع في البداية حتى تكون اللعبة عادلة ؟

9 يضم صندوق A كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء و يضم الصندوق B كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A و نضعها في الصندوق B .

1) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟

2) ما احتمال أن يكون في الصندوق B عدد الكرات البيضاء يساوي عدد الكرات السوداء ؟

3) ما احتمال أن يكون في الصندوق B عدد الكرات السوداء ضعف عدد الكرات البيضاء ؟

10 يضم كيس 49 مرقمة من 1 الى 49 ، منها 6 كريات حمراء و الباقي بيضاء . نسحب على التوالي دون ارجاع 6 كريات

1) ما عدد الطرق الكلية ؟

2) ما احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء ؟

3) ما احتمال الحصول على 6 كريات حمراء ؟

4) ما احتمال الحصول على 5 كريات حمراء ؟

5) ما احتمال الحصول على 4 كريات حمراء ؟

11 يتكون قسم مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة . يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا (الترتيب مهم)

1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

2) ماهو احتمال تشكيل لجنة بحيث :

أ) يكون الأمين تلميذة ؟

ب) التلميذ X موجودا في اللجنة ؟

ج) يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة ؟

د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين ؟

3) نفرض أن الرئيس تلميذا والأمين تلميذة وأن التلميذ X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y .

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف ؟

12 يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة من 1 الى 20 لا نفرق بينها عند اللمس .

1- نسحب كرة من الكيس ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- كرة تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

ب- كرة تحمل عددا ليس من مضاعفات 5 ؟

2- نسحب في هذه المرة كرتين على التوالي دون ارجاع ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- كرتين تحملان عددين مضاعفين للعدد 4 ؟

ب- كرتين إحداهما تحمل عددا مضاعفا للعدد 3 و الثانية تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

3- نسحب الآن 3 كرات على التوالي دون ارجاع ما هو إحتمال الحصول على :

أ- ثلاث كرات تحمل أعددا مضاعفة للعدد 4 ؟

ب- ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي ؟

13 نرمي قطعة نقود عادية ثلاث مرات متتابعة و نهتم بعدد الأوجه في الرميات الثلاثاء

1) عرف قانون الاحتمال و احسب أمله الرياضي و تباينه

2) أعد الإجابة عن السؤال من أجل 4 رميات متتابعة

14 يشارك فريد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها 0,65 . قرر فريد المحاولة 3 مرات متتابعة (نعتبر أن المحاولات مستقلة عن بعضها البعض) . نرمز بـ X لعدد مرات الفوز خلال ثلاث محاولات.

1) ما هو احتمال الحادثتين :

A " دوما يفشل في المحاولات الثلاثة "

B " يفوز مرة واحدة على الأقل في المحاولان ت الثلاثة "

2) عرف قانون الاحتمال للعدد X

3) أوجد الأمل الرياضياتي و التباين لـ X

15 يضم صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و ثلاث قريصات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 3 . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق ، ليكن X عدد الكرات البيضاء ضمن السحبة . وليكن Y رقم القريصة المسحوبة

1) عرف قانوني الإحتمال لكل من X و Y

2) أحسب الامل الرياضياتي لكل من X و Y

3) إذا اعتبرنا الامر يتعلق بلعبتين . فأيهما مربحة بالنسبة للاعب ؟

16 نعتبر قانون الاحتمال X المعرف كمايلي :

α	-1	2	3	4
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2) أحسب $P(X=2)$ و $P(X \geq \frac{5}{2})$ و $P(X \prec 1)$

17 يحوي كيس 3 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين و ليكن X العدد الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .

1) حدد مجموعة النتائج الممكنة .

2) حدد مجموعة القيم الممكنة للعدد X .

3) عرف قانون الإحتمال لـ X.

4) أحسب الامل الرياضياتي .

5) أحسب التباين .

6) أوجد $P(X \geq 25)$.

18 يحوي صندوق 5 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2 ، 3 ، 3 و 4 ، و خمس قريصات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 أيضا . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق و نعتبر العدد الحقيقي X الذي يساوي (1+) في حالة سحب قريصة بيضاء و صفر في حالة سحب قريصة سوداء ، و نعتبر أيضا العدد Y الذي يساوي الرقم الموجود على القريصة المسحوبة .

1) عرّف قانون الإحتمال لكل من X و Y.

2) أحسب الأمل الرياضياتي لكل عدد.

3) في حالة كونهما لعبتين . أيهما مربحة للاعب ؟

19 نرمي زهرة نرد رمية واحدة و ليكن X العلامة التي تحدد كمايلي :

- العلامة (10−) إذا ظهر الرقم 1
- العلامة (10) إذا ظهرت الأرقام 6
- العلامة (0) في الحالات الأخرى

1) حدد مجموعة المخارج ثم مجموعة القيم

2) إذا كانت زهرة النرد عادية عرّف قانون الاحتمال للعدد الحقيقي X

3) نفرض أن زهرة النرد غير متوازنة بحيث احتمال ظهور الأوجه 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12 .

- عرّف قانون الاحتمال للعدد X في هذه الحالة

2- الإحتمال الشرطي و الحوادث المستقلة

20 A و B حادثتين من E حيث

$p(A)=0,4$ ، $p_{\overline{A}}(B)=0,8$ و $p_A(B)=0,2$.

أنشئ الشجرة المثقلة ثم أحسب $p(A \cap B)$ و $p(B)$

21 A و B حادثتين من E حيث

$p(A)=0,4$ ، $p(\overline{A} \cap B)=0,3$

و $p(A \cap B)=0,2$.

- أحسب $p_A(B)$ و $p_{\overline{A}}(B)$

22 A ، B ، C و D حوادث من E حيث

$p(A)=0,3$ ، $p(B)=0,5$ و $p_A(D)=0,05$.

$p_B(D)=0,1$ و $p_C(D)=0,2$.

أنشئ الشجرة المثقلة ثم أحسب $p(D)$

23 يتكون فريق كرة سلة من 6 لاعبين ممتازين في تسديد الرميات الحرة . نسبة نجاح إثنين منهم في التسديد 80% ، و ثلاثة نسبة نجاحهم في التسديد 90% و آخرهم منصور نسبة نجاح التسديد عنده 95 % .

حضرنا مقابلة لهذا الفريق حيث كل لاعب من هؤلاء كانت له نفس فرص التسديد . أخذنا أحد اللاعبين عشوائيا نضع A الحادثة " منصور ضيع التسديدة "

R " رمية ناجحة "

1) أحسب الاحتمالات التالية $p(A)$ ، $p_A(R)$ و $p(A \cap R)$

2) أحسب $p(R)$ (يمكنك استعمال الشجرة)

24 لاعب تنس الميدان (كرة المضرب) ينجح في الإرسال الأول بنسبة 75% و في الإرسال الثاني بنسبة 90% .

ما احتمال ارتكابه خطأ مضاعف (إرسال خاطئ بالكرة الثانية).

25 يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10 . نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع .

1) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 .

2) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10 .

26 في مدينة ما ، 55 % من السكان مدخنون و 45 % منهم مدمنون على شرب القهوة و 30 % مدخنون و مدمنون على شرب القهوة . نأخذ عشوائيا رجلا واحدا من هذه المدينة :

1) إذا كان هذا الرجل مدخنا ، ما إحتمال أن يكون مدمنا على شرب القهوة أيضا ؟

2) إذا كان هذا الرجل مدمنا على شرب القهوة ،ماإحتمال أن يكون مدخنا أيضا ؟

3) ما إحتمال أن يكون مدخنا أو مدمنا على شرب القهوة ؟

27 يضم صندوق ثلاث قطع نقدية . قطعة عادية (تحمل وجه وظهر) و قطعة تحمل وجهين و القطعة الثالثة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 3/1 . نختار

عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة .
أحسب ل إحتمال الحصول على وجه . (يمكنك تشكيل الشجرة).

28 يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين .
نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع .
نرمز بـ B_1 للحادثة " الكرة المسحوبة في المرّة الأولى بيضاء "
و بـ B_2 للحادثة "الكرة المسحوبة في المرّة الثانية بيضاء "
- أحسب الإحتمال $p(B_1)$ ثم مباشرة $p(B_2/B_1)$
و استنتج $p(B_2 \cap B_1)$

29 A، B كيسان . يضم A كرة حمراء و كرة خضراء.
الكيس B يضم 3 كرات حمراء و كرة واحدة خضراء .
نسحب كرة من الكيس A و نضعها داخل الكيس B ثم نسحب كرة من الكيس B .
1) شكل الشجرة المناسبة
2) ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .
3) ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحبة الأولى بشرط أن تكون الكرة الثانية سوداء .

30 يضم صندوق كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء.
نسحب عشوائيا كرة واحدة . إذا كانت بيضاء ، نعيدها الى الصندوق و نضيف كرة بيضاء أخرى و إذا كانت سوداء نعيدها الى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نسحب كرة ثانية .
1) شكّل الشجرة المناسبة
2) أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A "يوجد 3 كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "
B "يوجد 5 كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة"

31 يتكون قسم من 25 % من البنات و 75 % من الأولاد .
نفترض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيدون . نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم .
1- ما احتمال أن يكون :
أ- بنتا ؟ ب- ولدا ؟ جـ- جيدا ؟
2- ماهو احتمال أن يكون ذلك التلميذ بنتا علما أنها عنصرا جيدا ؟

32 يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 الى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 .
- نسحب عشوائيا على التوالي دون ارجاع .
1- أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "
B " الكرتان من نفس اللون "
C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "
- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟
2- ما إحتمال الحوادث التالية :
D " الكرتان من لونين مختلفين "
E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "
3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما إحتمال أن يكون رقماهما فرديين ؟

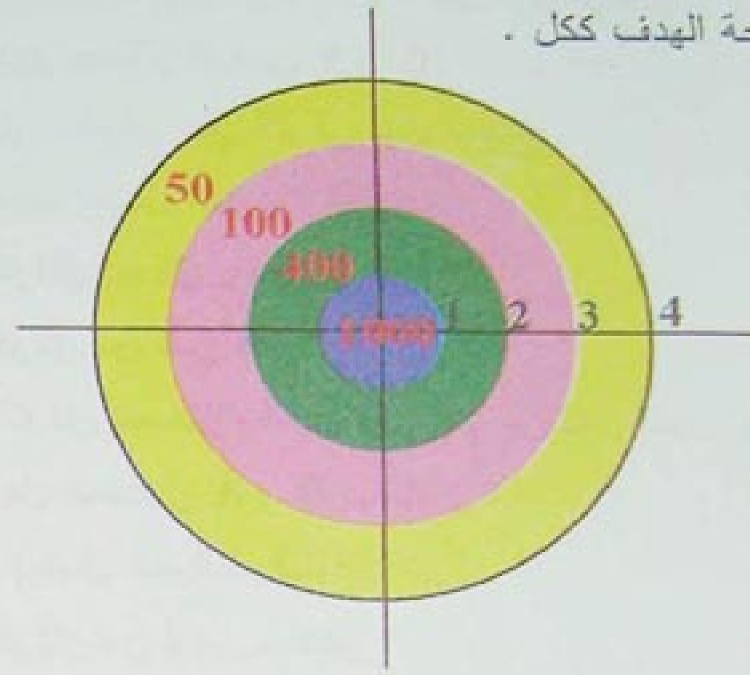
تمارين للتعمق

33 يضم كيس 7 قريصات . واحدة حمراء ، إثنتان صفراوتان و أربع خضراء .
تقتضي اللعبة سحب قريصة واحدة من الصندوق
- إذا كانت حمراء اللاعب يربح 10DA
- إذا كانت صفراء يخسرر اللاعب 5DA
- إذا كانت خضراء يعيد اللاعب سحب قريصة أخرى دون إرجاع الاولى الى الكيس ، فإذا كانت الثانية حمراء يربح اللاعب 8DA و إلا يخسر 4DA
نهتم بالربح الجبري (ربح أم خسارة) في نهاية اللعبة .
لتكن E مجموعة الأرباح الممكنة
1) أ) أنشئ الشجرة المثقلة المفصلة
ب) أحسب احتمال الحادثة G " اللاعب رابح "
ج) عرّف قانون احتمال على المجموعة E و أحسب الامل الرياضياتي
2) قدّر الربح الجبري الذي يقترح على اللعبة حينما تكون سحبته الثانية قريصة حمراء و ذلك حتى تكون اللعبة عادلة.

تمارين

34 **هدف و مساحة :**

رامي قوس بارع دوما يصيب الهدف لكن إحتمال إصابة أية منطقة من المناطق الأربعة هو نسبة مساحتها الى مساحة الهدف ككل .



ليكن X العلامة النهائية المترتبة عن تسديد سهم واحد

1) حدد القيم الممكنة لـــ X.

2) عرّف قانون الإحتمال لـــ X.

3) أحسب الأمل الرياضياتي و الإنحراف المعياري.

35 يحتوي كيس A على 3 كريات تحمل الرقم 1 و كريتان تحملان الرقم 1− و كرية واحدة تحمل الرقم0 .
يحتوي كيس B على 3 كريات تحمل الرقم 1− و كريتان تحملان الرقم 0 و كرية واحدة تحمل الرقم1 .
نختار كيسا من بين الكيسين ثم نسحب كريتان منه بالتتابع و بدون إرجاع.
نعتبر X مجموع الرقمين المسجلين على الكريتين المسحوبتين.
1.حدد قانون احتمال X.

36 في عينة من 50 شخصا نلاحظ الرجال الملتحين (لهم لحية) أو أعينهم زرقاء .
عددنا 20 شخصا لهم لحى ، 15 شخص لهم أعين زرقاء منهم 8 ملتحون .
نتحاور مع أحدهم عشوائيا
نضع R " رجل له لحية " ، B " رجل له عينان زرقاوتان "
أحسب الاحتمالات التالية:

$p(R)$ ، $p(B)$ ، $p(R\cap B)$ و $p_R(C)$

مسائل

37 (X) ، (Y) راميا قوس ، كل منهما يسدد سهما نحو هدف. احتمال كل منهما في إصابة الهدف 0,85 ، 0,90 على الترتيب .

1) إذا علمت أن :

– إحتمالات إصابة الرامي (X) المناطق I – II – III على الترتيب هو $\frac{1}{12}$،$\frac{1}{3}$،$\frac{7}{12}$.

– إحتمالات إصابة الرامي (Y) المناطق I – II – III متساوية .

1– الرامي (X) يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :

أ– ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة III ؟

ب– ما احتمال إصابة I – II – III بهذا الترتيب ؟

جـــ– ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III ؟

2– نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي (X) ضعف احتمال اختيارالرامي (Y) .

أ– في حالة تسديد رمية واحدة . ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III ؟

ب– علما أن رمية واحدة قد سُدِّدت و أصابت المنطقة III ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي (X) ؟

38 سمير و منير صديقان حميمان . يدرسان في نفس القسم النهائي. مستوى سمير الدراسي غير كاف قال عنه الأستاذ أن إحتمال أن ينجح في البكاوريا 0.5 .

إذا كان إحتمال أن ينجح منير هو 0.7 فأحسب:

-1– إحتمال أن يعيشا معا هذه المدة.

-2– إحتمال ان يعيش عمر وحده هذه المدة.

-3 -إحتمال أن يعيش واحد منهما فقط هذه المدة.

-4– إحتمال ان يعيش يوسف وحده هذه المدة.

-5- إحتمال ان لا يعيشا معا هذه المدة.

-6– إحتمال أن لا يعيشا هذه المدة.

-7– أحسب مجموع الأحتمالات التي حصلت عليها .
ماذا تستنتج ؟

39 نسحب كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق يضم كرات بيضاء و سوداء .

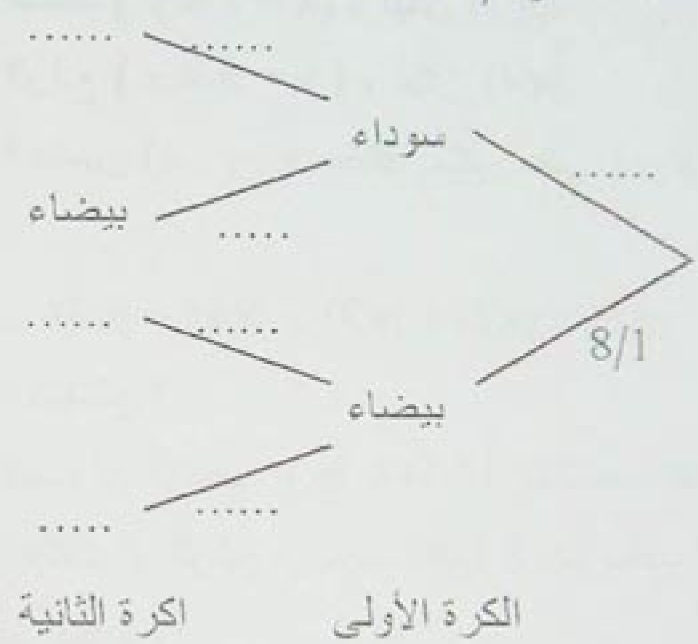
إذا علمت أن احتمال أن تكون الكرة الأولى **بيضاء** هو $\frac{1}{8}$ ،

نفرض صحة الشرطين التاليين :

- احتمال أن تكون كرة ما **بيضاء** بشرط أن تكون الكرة المسحوبة سابقا **بيضاء** هو $\frac{1}{20}$
- احتمال أن تكون كرة ما **بيضاء** بشرط أن تكون الكرة المسحوبة سابقا **سوداء** هو $\frac{1}{20}$

1- إذا سحبنا كرتين على التوالي دون إرجاع .

أ- أكمل الشجرة (العنكبوتية) التالية



ب) ليكن X العدد الحقيقي المساوي لعدد الكرات السوداء ضمن الكرتين المسحوبتين ، عرف قانون الاحتمال للعدد الحقيقي X.

ج) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين .

2- إذا سحبنا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع (الأولى ، الثانية و الثالثة)

أ) ما احتمال أن تكون الكرة الثالثة سوداء؟

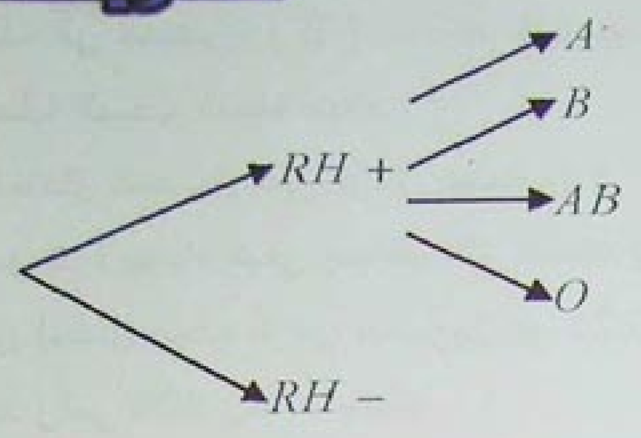
ب) ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة سوداء ؟

40 الزمر الدموية :

الجدول التالي يبين توزيع مختلف الزمر الدموية على عينة من الناس.

الزمرة	O	A	B	AB
Rh +	39%	38%	6%	2%
Rh -	6%	6%	2%	1%

1) أكمل الشجرة التالية:



2) أخذ شخص عشوائيا من هذه العينة ، ما احتمال

أ) أن تكون فصيلته موجبة ؟

ب) أن تكون فصيلته سالبة علما أن زمرته O ؟

41 ينتج مصنع آلات حاسبة عادية وآلات حاسبة علمية إلا أن عدد الآلات العادية التي ينتجها ضعف عدد الآلات العلمية . احتمال وجود خلل في حاسبة عادية هو 0,05 أما في حاسبة علمية فهو 0,03

أخذ المراقب حاسبة واحدة عشوائيا . أحسب احتمال أن تكون :

1) الحاسبة عادية .

2) الحاسبة علمية

3) الحاسبة فيها خلل ؟

4) الحاسبة عادية علما أن فيها خلل .

42 (A)،(B) صندوقان . الصندوق (A) يحوي 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء أما الصندوق (B) فيحوي 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق (B) و نسجل لونها و نعيدها الى الصندوق (B) الذي نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها أيضا .

1- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2- ما إحتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

3- نعرف لعبة كمايلي تمنح لكل كرة بيضاء العلامة ($+\alpha$) و لكل كرة سوداء العلامة ($-\alpha$) .

أ- عرف قانون الإحتمال للعلامة النهائية X ثم أحسب الأمل الرياضياتي.

ب- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون الأمل الرياضياتي مساو لـــ1 .

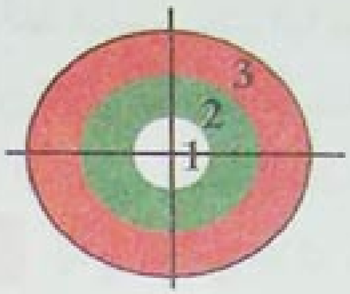
تمارين

4- تضيف الى الصندوق (B) ، n-3 كرة سوداء و نعيد عملية السحب المبينة أعلاه .

أ- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

ب- كم من كرة سوداء ينبغي إضافتها الى الصندوق (B) حتى يكون إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو 0,25 ؟

43 يسدد رامي ثلاث رميات متتالية نحو هدف (أنظر الى الشكل) .



إذا علمت أن إحتمال إصابة هذا الرامي للهدف هو 0,7 .

1- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف ثلاث مرات ؟

2- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرتين فقط ؟

3- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

4- إذا علمت أن الهدف مقسم الى ثلاث مناطق (الشكل) بحيث إحتمال أن يصيب هذا الرامي المنطقة (1) هو 0,1 و احتمال أن يصيب المنطقة (2) هو 0,2 و احتمال أن يصيب المنطقة (3) هو 0,4 فأحسب احتمال .

أ- أن يصيب المنطقة (1) ثلاث مرات ؟

ب- أن تصيب كل رمية منطقة واحدة فقط ؟

5- X النقطة الممنوحة للرامي ، بحيث إذا أصاب المنطقة (1) له العلامة 10 و المنطقة (2) له العلامة 7 و المنطقة (3) له العلامة 5 و إذا أخطأ الهدف كلية كانت العلامة صفر.

- عرف قانون الإحتمال لـــX ثم أحسب الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري .

44 يضم صندوق خمس قريصات تحمل الأرقام التالية (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، x) حيث x عدد طبيعي ، و ليكن p(n) احتمال سحب القريصة ذات الرقم n . إذا علمت أن الاعداد p(1) ، p(2) ، p (3) ، p(4) ، p(x) بهذا الترتيب تشكل حدود من متتالية حسابية أساسها 1/15 .

1- أوجد الأعداد p(1) ، p(2) ، p (3) ، p(4) ، p(x)

2- ليكن T العدد الحقيقي المساوي للرقم الذي تحمله القريصة المسحوبة . عين قيمة x حتى يكون الامل الرياضياتي يساوي 4 . و أحسب التباين عندئذ .

45 يضم صندوق 10 كرات مرقمة من 0 إلى 9 يطلب من اللاعب أن يسحب 3 كرات على التوالي دون إرجاع . و لتكن (x , y , z) هي النتائج مرتبة حسب رتبة سحبها.

1- أحسب احتمال الحصول على النمط التالي :

* النمط الأول (x = y = z) و ليكن p(1).
* النمط الثاني (x = y ≠ z) و ليكن p(2)
* النمط الثالث (x = z ≠ y) و ليكن p(3).
* النمط الرابع (y = z ≠ x) و ليكن p(4).
* النمط الخامس (x , y , z مختلفة مثنى مثنى) و ليكن p(5).

2- أحسب p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) .

- ماذا تستنتج ؟

3- إذا علمت أن اللاعب يربح 11 DA إذا سحب النمط الثاني أو الثالث أو الرابع و يخسر a DA إذا سحب النمط الأول أو الخامس .

أ- عرف قانون الاحتمال للربح المترتب عن كل عملية سحب .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي .

جـــ- من أجل أي قيمة للعدد a يكون اللعب متعادل (لا خسارة و لا ربح) ؟

46 يريد أحمد أن يتصل بسعيد هاتفيا لكنه - لسوء حظه - نسي الرقم تماما ، فقرر عبثا القيام ببعض المحاولات و ذلك بتشكيل أعداد منْ 6 أرقام . إذا كان P هو إحتمال أن يصيب مبتغاه في المحاولة الأولى.

تعطى النتائج على الشكل ($n \times 10^{-6}$)

1- أحسب P .

2- تذكر أحمد أمرا هاما ، الرقم الصحيح يضم رقمين زوجيين متمايزين فقط . أحسب أنت P إن استطعت .

3- بعد قليل تذكر أحمد شيئا آخر . من بين الأرقام الفردية يوجد رقمان فقط من مضاعفات 3."إن كنت ذكيا" أحسب P.

4- و ها هو أحمد بنفسه يؤكد لك أن الرقمين الزوجيين مجموعهما يساوي 10 . فهل بإمكانك الآن حساب P ؟

5- سأل أحمد أخاه علي . هل تعرف رقم هاتف سعيد ؟ قال علي : لا ، لكني أعرف أنه يضم أربعة أرقام فردية منها إثنان متساويان و متتابعان . ساعدهما أنت بحساب P.

6- و يصرخ أحمد لقد تذكرت . إن أحد الرقمين الزوجيين هو 8 و ترتيبه الاول و الرقم الأخير هو 7 . هل تتكرم أنت بحساب P ؟

7- و بعد عدة محاولات إستطاع أحمد الإتصال بسعيد الذي ضحك كثيرا لسماعه القصة و قال له يا أحمد تذكر دائما أن مجموع أرقام هاتفي يساوي 30 و هو مكون من أربعة أرقام متساوية مثنى مثنى و متتابعة فإلى اللقاء .

- إن فهمت القصة فما رقم هاتف سعيد ؟

47 في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم زوجيا سمح له برمية أخرى و هكذا و تنتهي اللعبة بعد 10 رميات إجباريا أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا .

1- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الاولى؟

2- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية؟

3- إذا أراد اللاعب أن يكون إحتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات الذي لا ينبغي تجاوزه ؟

4- تقتضي هذه اللعبة أن يدفع اللاعب 1DA مقابل كل محاولة (و لا يدفع مادام يحصل على رقم زوجي) على أن يربح 5DA إذا حصل على رقم زوجي .

أ- ما إحتمال أن يربح اللاعب 20 DA ؟

ب- ما إحتمال أن لا يخسر و لا يربح ؟

5- تعدل اللعبة بالكيفية التالية : صاحب الرقم الزوجي يربح 5 DA و صاحب الرقم الفردي يخسر 2 DA و على كل لاعب أن يحاول 3 مرات فقط إلزاميا .

ليكن X الربح المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال لـــ X ثم أحسب امله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

48 يضم صندوق 5 قريصات،4 سوداء و واحدة بيضاء.

1) نسحب من الصندوق 6 قريصات على التوالي مع الإرجاع .ليكن X عدد القريصة البيضاء المسحوبة. عرّف قانون الاحتمال لـــ X و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

2) نقوم الآن بالسحب n مرّة (بنفس الكيفية السابقة) . ليكن X_n عدد القريصة البيضاء المسحوبة.

- عرّف قانون الاحتمال للعدد X_n و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

3) ليكن Y_n العدد الحقيقي $\frac{X_n}{n}$ الذي يمثّل تواترات ظهور القريصة البيضاء

- عرّف قانون الاحتمال للعدد Y_n و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

49 يحتوي كيس على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس واحدة صفراء، 7 حمراء و زرقاوين.

في لعبة تقتضي أولا سحب كرية من الصندوق: إذا كانت الكرية صفراء فإن اللعبة تتوقف، إذا كانت الكرية المسحوبة غير صفراء ،نسحب كرية ثانية دون إرجاع الكرية المسحوبة الأولى إلى الكيس.

1.أ- ما هو احتمال سحب كرية صفراء في السحب الأول؟

ب- ما هو احتمال سحب كرية حمراء في السحب الأول؟

ج- ما هو احتمال أن يسحب اللاعب كرية صفراء في السحب الثاني علما أنه سحب كرية حمراء في السحب الأول؟

2.في هذا السؤال يمكن استعمال شجرة الاحتمالات

أ- ما هو احتمال سحب كرية زرقاء في السحب الأول و كرية حمراء في السحب الثاني؟

ب- بين أن احتمال سحب كرية حمراء في السحب الثاني هو $\frac{28}{45}$.

3.لاعب يربح إذا سحب كرية حمراء في السحب الثاني .4 أشخاص يشاركون في هذه اللعبة.

أ- احسب احتمال ألاّ يربح أحد من الأشخاص الأربعة.

ب- احسب احتمال أن يربح شخص على الأقل من الأشخاص الأربعة.

اختيار من متعدد

50 في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث

$P(A)=0,7$ ، $p(B)=0,4$ و $p(A\cup B)=0,2$

1) قيمة الاحتمال $p(A\cup B)$ هي :

a) 0,9   b) 1,1   c) 0,6

2) قيمة الاحتمال $p(\bar{A}\cap B)$ هي :

a) 0,8   b) 0,2   c) 0,1

قيمة الاحتمال $p(\bar{A}\cap\bar{B})$ هي :

a) 0,8   b) 0,1   c) 0,3

قيمة الاحتمال $p(\bar{A}\cup\bar{B})$ هي :

a) 0,8   b) 0,9   c) 0,1

51 جواب واحد على الأقل صحيح

تجربة تتبع قانون برنولي حيث احتمال النجاح هو P و احتمال الإخفاق هو q

a) $p<1$

b) $p=q$

c) $p>q$

d) $p<0,5$

e) $p=1-q$

52 جواب واحد على الأقل صحيح

في مطعم 60 % من المأكولات سمك (S)

20 % من المثلجات (G) و 30 % ليست أسماك و لا مثلجات .

a) $p(\bar{S})=0,40$

b) $p(S\cup G)=0,8$

c) $p(S\cap G)=0,1$

d) $p(S\cap\bar{G})=0,5$

e) $S\cap\bar{G}$; $\bar{S}\cap G$ غير متلائمتين

صحيح أم خاطئ

53 60 % من مجتمع مطعمة (V) ضد مرض ما ، نلاحظ أن 5 % منهم حساسية A ، من بين الأشخاص غير المطعمين ، 10 % عرضة للحساسية A .

نختار شخصا عشوائيا مطعما ، احتمال أن يكون عرضة للحساسية هو :

a) $p_A(V)$

b) $p(V)$

c) $p_V(A)$

d) 0,10

e) 0,05

f) 0,6

54 A ، B حادثتان مستقلتان

a) $p(A\cap B)=P(A)\times p(B)$

b) $p_A(B)=p(A)$

c) $p_B(A)=p(A)$

d) $p(A\cup B)=P(A)\times p(B)$

e) $P(B)=1-p(A)$

55 الجدول التالي يعرّف قانون احتمال للعبة ما :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,25	0,1	0,15	0,2	0,2

1- يضرب الأمل الرياضياتي في العدد 100 إذا حولت الإحتمالات الى نسب مئوية .

2- يزداد الأمل بـ 1 إذا أضيف لكل القيم العدد 1 .

3- ينقص الأمل بنسبة 20% إذا نقصت كل القيم بنفس النسبة .

4- إذا استبدلت القيمة 6 بالقيمة 7 يزداد الامل بمقدار 0,2

ISBN : 978 - 9947 - 20 - 521 - 1 : ردمك
Dépot légal : 119 / 2007 : رقم الإيداع القانوني

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية Onps
Office National des Publications Scolaires

2011 - 2012
MS : 1314 / 07

مصادق عليه من طرف لجنة الاعتماد والمصادقة للمعهد الوطني للبحث في التربية - وزارة التربية الوطنية - وفق القرار رقم 1867 / م.ع / 08 بتاريخ 22 أكتوبر 2008